GHEORGHE PĂUN

ÎNTRE MATEMATICĂ ȘI JOCURI

EDITURA ALBATROS

GHEORGHE PĂUN

ÎNTRE MATEMATICĂ ȘI JOCURI

GHEORGHE PĂUN

ÎNTRE MATEMATICĂ ȘI JOCURI

Coperta : IORGOS ILIOPOLOS

Ilustrațiile aparțin autorului

colecția cristal

1986
BUCUREȘTI

1. Introducere 5
2. Extraordinarele probleme ale lui Lewis Carroll 7
2.1. Notă biografică 7
2.2. Şaisprezece probleme de logică 9
3. Din problemele lui Sam Loyd 25
3.1. Nouă probleme 25
3.2. Jocul 14—15 33
4. Cîteva jocuri de două persoane 39
4.1. Cu creionul pe hîrtie 39
4.2. BONOL 46
4.3. Moara cu noroc 49
4.4. Trei-în-rînd, patru-în-rînd, cinci-în-rînd .. 52
4.5. CUGO 59
4.6. Moară tridimensională 61
4.7. Jocul evitării pătratelor şi IMPAS 68
5. Jocuri de o singură persoană 74
5.1. Inepuizabilul TANGRAM 74
5.2. Cubul SOMA 80
5.3. Poliominouri 89
5.4. Cubul lui Rubik 105
5.5. Dominoul lui Rubik 121
5.6. Sfera lui Varga 125
5.7. Solitarul 133
5.8. Domino-dodecaedru 141
5.9. Cubo-turn şi hexa-turn 146
5.10. Turnuri, bile, permutări 156
5.11. Cubul cu buline 160
5.12. Cascada 163
6. Logică în joacă 167
6.1. Itinerare pe tabla de şah 167
6.2. Şiruri şi pătrate de dominouri 172
6.3. Trucuri matematice cu cărţi de joc 183
6.4. Rîuri, bărci şi logică 186
7. Incomparabilul GO 190
7.1. Regulamentul jocului de GO 192
7.2. O mini-partidă comentată 197
7.3. Cîteva consideraţii matematice asupra GO-ului 201
8. Bibliografie 207

Matematica și jocurile sînt frați. Frați siamezi.

Separat despre matematică și separat despre jocuri s-au scris și se vor mai scrie încă multe pagini. La fel de multe lucruri s-au spus despre matematică *și* jocuri. Nu este intenția acestei introduceri să le repete. Toate prefețele cărților de jocuri logice, de matematică „distractivă", de amuzamente matematice, fac referiri la valoarea instructiv-educativă a jocurilor, la posibilitatea de a întredeschide prin intermediul lor porți spre matematica „serioasă", majoritatea marilor matematicieni (sau cel puțin cei care au scris nu numai teoreme, ci și *despre* teoreme) au elogiat rolul jocurilor logice în antrenarea gîndirii, în formarea plăcerii și priceperii de a raționa riguros, de a gîndi matematic deci. Pedagogii, psihologii și chiar sociologii găsesc jocurilor în general și celor logice în special semnificații și merite nu numai banal formative, dar și funcții curative uneori, de defulare etc. („Jocul este oglinda gîndurilor noastre secrete", a spus nu-știu-cine.)

Iar despre ultimul pătrar al veacului nostru, mai mulți autori s-au întrebat (retoric, deoarece însăși formularea întrebării este un argument în favoarea răspunsului afirmativ) dacă nu cumva el va fi numit de către urmașii noștri „era jocurilor logice". Argumente? Ajunge unul: cubul lui Rubik (și întreaga industrie a jocurilor de permutare declanșată de acesta; și la noi există „simptome" care inaugurează o „eră a jocurilor": a se vedea, de exemplu, campania de jocuri logice a CENTROCOOP-ului, a UCECOM-ului și a altor producători). Pentru că, deși omul s-a jucat și a făcut matematică dintotdeauna, niciodată cele două preocupări nu au cunoscut răspîndirea din ultimele decenii. Separat, dar și în tandem. Influențîndu-se reciproc. În bine. Nivelul tot mai ridicat de școlire matematică (la nivelul publicului larg) își găsește un bun domeniu de acțiune în jocuri; iar plusul de pricepere în a opera cu silogisme se reîntoarce spre mate-

matică, „umanizînd-o", apropiind-o. O carte extraordinară de „matematică a jocurilor", apărută în 1982 la Academic Press și pe care o voi cita de mai multe ori în această lucrare, *Winning ways for your mathematical plays*, de E.R. Berlekamp, J.H. Conway și R.K. Guy, este dedicată „lui Martin Gardner, cel care a dat mai multă matematică mai multor milioane [de oameni] decît oricine altcineva". O dedicație care ne scutește de orice comentarii și cuvinte în plus despre importanța jocurilor matematice.

*

Cîteva explicații privind obiectivele și conținutul cărții de față. Ea nu este nici o lucrare de matematică, nici una de jocuri (fie ele matematice sau nu). Ea vrea să se plaseze „între" cele două domenii, la jumătatea distanței dintre ele. Cititorul nu va găsi aici decît puține simboluri și relativ puține noțiuni matematice. Va găsi jocuri, dar aproape niciodată prezentate ca un scop în sine. Sînt avute în vedere mai ales jocuri cu o noimă matematică vizibilă, sau care cer raționamente ingenioase, în mai mulți pași, de o logică strînsă, pentru a fi „dezlegate". Raționamente matematice deci. Gîndire matematică, fără a face neapărat apel la cunoștințe de manual. Căutarea strategiilor de cîștig sau de remiză, demonstrarea că ele există sau nu (pentru jocurile de două persoane), precum și găsirea, formularea și justificarea algoritmilor de „rezolvare" a jocurilor de o singură persoană sînt probleme tipice care trebuie abordate cu instrumentele gîndirii matematice. Iar din punctul de vedere al „temperaturii" raționamentelor, multe pagini din această lucrare (din capitolele 1, 4, 5 și 6 în primul rînd) pot sta alături de pagini curente din articole matematice uzuale. De fiecare dată folosindu-se însă noțiuni și termeni ad-hoc, numai arareori făcînd apel la rudimente de logică formală, algebră, aritmetică, grafuri, combinatorică.

Bineînțeles, în selectarea jocurilor care urmează, pe lîngă apropierea lor de matematică, a operat și criteriul preferințelor autorului (și cel al posibilităților de documentare). Sper că intersecția cu preferințele cititorului nu este vidă. Și, de asemenea, mai sper că cititorul va duce mai departe (unele dintre) raționamentele prezentate în această lucrare, ajungînd să îndrăgească în egală măsură ambii termeni care-i dau titlul. Succes!

2.1. Notă biografică

O lume întreagă a auzit de scriitorul Lewis Carroll, autorul — printre altele — fermecătoarelor aventuri ale Alicei în Țara minunilor și în Țara de dincolo de oglindă. Mult mai puțini oameni știu însă că Lewis Carroll este pseudonimul literar al reverendului Charles Lutwige Dodgson (27 ianuarie 1832 — 14 ianuarie 1898), din 1855 pînă în 1881 *mediocru* profesor de matematică la Oxford, autorul unor *încîlcite* și *demodate* manuale de geometrie, algebră și trigonometrie. Epitetele anterioare, deloc măgulitoare în sine, sînt repetate de fiecare dată cînd vine vorba de „perechea" Dodgson—Carroll și ele sînt motivate nu numai de comparația dintre activitatea profesorală („cenușie", cum altfel? cînd e vorba de trigonometrie, algebră etc.) și sclipitoarele povești ale Alicei, dar, se pare, Dodgson era „mediocru" și în comparație cu alți colegi, profesori de matematică. (La un moment dat, studenții săi au înaintat chiar o petiție conducerii colegiului, cerînd trecerea la un alt profesor.)

Separarea dintre Dodgson-matematicianul și L. Carroll-scriitorul nu este însă deloc atît de tranșantă pe cît s-ar părea. Nu mă refer la faptul că și cărțile despre peripețiile Alicei sînt pline de „încurcături de minte", de dialoguri care au un substrat logico-matematic vizibil, speculînd adesea din punct de vedere logic slăbiciuni ale limbii — engleze, în cazul în speță. Exemplu: Alice: „Nimeni pe drum". Regele (supărat): „Trebuie să ai ochi foarte buni ca să vezi pe *Nimeni* de la o așa de mare distanță". La jumătatea drumului dintre matematică și literatură, Dodgson-Carroll este însă și autorul a numeroase enigme logice, de un gen aparte, absurde și savuroase ca formă, impecabile în conținut, inimitabile și tocmai de aceea imitate adesea. Ne vom ocupa de cîteva asemenea probleme peste cîteva pagini. Schema lor generală este următoarea: se dau o serie de premise, care leagă între ele mai multe categorii de obiecte, animale, personaje umane

etc. și se cere deducerea din aceste premise a unei concluzii logice (eventual și imaginarea concluziei și demonstrarea ei). Exact ca în matematică, în cadrul unui sistem formal, diferența fiind că aici problema este formulată în vorbe și... semnată Lewis Carroll.

Apropo de semnătură: acest pseudonim nemuritor a fost folosit pentru prima dată în 1856 și cu acest nume și-a semnat C.L. Dodgson problemele de care vorbeam (strînse într-un volum (re)publicat în 1958 la Editura Dover, New York: *Mathematical recreations of Lewis Carroll. Symbolic logic and the game of logic*), semn, poate, că le considera mai aproape de literatură decît de matematică. După cum vom vedea, aceste probleme pot fi rezolvate „literar", în vorbe, dar și matematic, folosind elemente simple de teoria mulțimilor și de logica propozițiilor. De fapt, chiar L. Carroll le însoțește cu explicații logice (inclusiv un formalism de profil, demodat, într-adevăr) și le rezolvă în acest cadru.

Un amănunt interesant aici: Lewis Carroll propunea un sistem de figurare grafică a mulțimilor, altul decît cel al lui Euler-Wenn, uzual azi în matematică (mai ales în clasele elementare, spre „deliciul" părinților...), și pe care îl credea (cu argumente) inferior sistemului propriu; după cum se vede, propunerea sa nu a reușit însă să se impună.

Activitatea „enigmistică" a lui Lewis Carroll nu se reduce la aceste probleme. Fantezia sa a fost de-a dreptul prodigioasă. El este, printre altele (re)inventatorul jocului numit azi „golf de cuvinte", ca și al unui joc care poate fi considerat precursorul atît de „modernului" („la modă", care va să zică)... Scrabble! De numele lui Carroll sînt legate și o sumedenie de trucuri, dintre cele mai diverse: cu cărți de joc, cu numere, trucuri mecanice etc. (nu neapărat inventate de el, dar practicate, perfecționate, îmbrăcate într-o haină verbală nouă). În 1973, J. Fisher a editat, la Penguin Books, o carte cu titlul *The magic of Lewis Carroll*, cuprinzînd labirinturi, trucuri de prestidigitație, jocuri inedite cu cărți, enigme, acrostihuri, sisteme de cifrare, anagrame, probleme de șah sau cu pretext șahist, paradoxuri geometrice, probleme Tangram, problema celor patru culori (!), probleme clasice gen lupul-capra-varza (traversarea unui rîu cu o barcă în care..., vezi secțiunea 6.4 pentru probleme de acest tip), un calendar perpetuu (pentru aflarea zilei din săptămînă în care cade o dată oarecare) și multe, multe altele.

Dar Lewis Carroll nu s-a oprit aici! La jocuri adică. El este și autorul unei impresionante liste de „invenții" șocante și „utile": un nou sistem de acordare a premiilor la campionatele de tenis de cîmp, un plan pentru dirijarea circulației în Covent Garden, un șah de voiaj, cu găuri în care puteau fi introduse piesele, un dispozitiv de direcție pentru... triciclete etc. etc. A redescoperit, printre altele, și paradoxul lui Condorcet (regula majorității poate conduce la ierarhii de grup netranzitive, chiar dacă se pleacă de la ierarhii individuale tranzitive; vezi, de pildă, Gh. Păun, *Din spectacolul matematicii*, Edit. Albatros, 1983) și, în replică, a propus un nou sistem de vot, „de departe cel mai bun pe care l-am întîlnit", după cum scria el în jurnal, la 3 iunie 1884. Iar în ultima parte a vieții s-a dedicat fotografiei, ajungînd un portretist cunoscut, context în care a inventat și aparatul de fotografiat automat, pentru a-și putea face și sie însuși portretul...

O figură extraordinară acest Lewis Carroll. În comparație cu el, obscurul C.L. Dodgson nu putea fi altfel decît „mediocru". Mai ales că după 1881 a și demisionat din postul de la Oxford, dedicîndu-se complet literaturii, jocurilor, invențiilor. Iar în ultimii ani ai vieții — rezultă asta din jurnalul său — avea atîtea proiecte literare, de jocuri și de invenții, încît este un mare păcat că s-a stins înainte de a realiza măcar o parte dintre ele.

2.2. Șaisprezece probleme de logică

Evantaiul de dificultate al problemelor de logică ale lui Lewis Carroll este foarte larg. Iată una dintre cele mai simple: Din premisele

(P1) 1. *Copiii sînt ilogici.*

2. *Oamenii care pot îmblînzi crocodili nu sînt disprețuiți.*

3. *Persoanele ilogice sînt disprețuite.*

să se deducă concluzia: *„Copiii nu pot îmblînzi crocodili"*.

(Se observă că se lucrează cu logica bivalentă, aristoteliană, obișnuită, în care apar conjuncții, disjuncții, negații și implicații.)

Nu voi discuta modul de rezolvare a acestei probleme, ci voi intra în detalii în legătură cu următoarea: Din premisele

(P2) 1. *Apreciez foarte mult tot ceea ce îmi aduce John.*
2. *Nimic în afara acestui ciolan nu-l satisface pe cîinele meu.*
3. *Am foarte mare grijă de tot ceea ce apreciez.*
4. *Acest ciolan mi-a fost adus de către John.*
5. *Lucrurile de care eu am mare grijă sînt lucruri pe care nu le dau cîinelui.*

să se obțină concluzia: *„Nimic din ceea ce eu îi dau cîinelui meu nu-l satisface"*.

Toate problemele de acest gen ale lui Dodgson-Carroll pot fi rezolvate folosind elemente simple de teoria mulțimilor. Voi folosi această metodă la problema următoare. Aici mă voi opri la o rezolvare directă, verbală.

Deci, să ne gîndim la *ceea ce îl satisface pe cîinele meu*. Conform premisei 2, *numai ciolanul acesta îl satisface*. Dar (premisa 4), *acest ciolan mi-a fost adus de către John*. Deoarece *eu apreciez tot ce-mi este adus de către John* (premisa 1), rezultă că *eu apreciez acest ciolan*, iar din premisa 3 obținem că *am foarte mare grijă de acest ciolan*. Atunci, folosind premisa 5, deducem că *eu nu dau acest ciolan cîinelui*, altfel spus, *ceea ce eu îi dau cîinelui meu nu este acest ciolan*, deci, revenind la premisa 2, *nu-l satisface*.

Cititorul poate exersa în același mod, încercînd să obțină concluzia *„Eu evit totdeauna cangurii"*, din următoarele zece premise:

(P3) 1. *Toate animalele din această casă poartă numele Jim.*
2. *Orice animal căruia îi place să se uite lung la lună este bun de mascotă.*
3. *Atunci cînd eu detest un animal, îl evit.*
4. *Nici un animal nu este carnivor, în afara celor care vînează noaptea.*
5. *Nici un animal cu numele Jim nu ezită să ucidă șoareci.*
6. *Nici un animal nu s-a atașat vreodată de mine, cu excepția celor din această casă.*
7. *Cangurii nu sînt buni de mascote.*
8. *Numai carnivorele ucid șoareci.*

9. *Detest animalele care nu sînt atașate de mine.*
10. *Animalelor care vînează noaptea le place totdeauna să se uite lung la lună.*

Iată mai întîi rezolvarea verbală a acestei probleme. Cele zece premise pot fi legate într-un lanț de silogisme în felul următor: *Cangurii nu sînt buni de mascote* (premisa 7), prin urmare (premisa 2), *cangurilor nu le place să se uite lung la lună*, deci *cangurii nu vînează noaptea* (premisa 10). Din premisa 4 rezultă că, în plus, *cangurii nu sînt carnivori*, deci *ei nu ucid șoareci* (premisa 8). Premisa 5 implică acum faptul că *numele Jim nu este atribuit unor canguri*, de unde obținem că *în această casă nu există canguri* (premisa 1). În consecință (premisa 6), *nici un cangur nu este atașat de mine*. Rezultă că *eu detest cangurii* (premisa 9) și, conform premisei 3, obținem că *eu evit cangurii*, concluzia cerută. (Premisele sînt deci folosite în ordinea următoare: 7, 2, 10, 4, 8, 5, 1, 6, 9, 3.)

Problema poate fi însă rezolvată elegant implicînd cîteva noțiuni simple de teoria mulțimilor. Iată o asemenea rezolvare. Premisele problemei se referă la animale, de fapt, la o serie de mulțimi de animale, individualizate în funcție de anumite proprietăți. Aceste mulțimi sînt:

A = mulțimea animalelor *din această casă*,
B = mulțimea animalelor *care poartă numele Jim*,
C = mulțimea animalelor *cărora le place să se uite lung la lună*,
D = mulțimea animalelor *bune de mascotă*,
E = mulțimea animalelor *pe care le detest*,
F = mulțimea animalelor *pe care le evit*,
G = mulțimea animalelor *carnivore*,
H = mulțimea animalelor *care vînează noaptea*,
I = mulțimea animalelor *care ucid șoareci*,
J = mulțimea animalelor *care sînt atașate de mine*,
K = mulțimea *cangurilor*.

Cele zece premise descriu relații de incluziune între aceste mulțimi, uneori implicînd și complementarele lor. (Pentru o mulțime oarecare, X, notăm cu $\bar{X}$ complementara ei, în cazul nostru, *mulțimea animalelor care nu au proprietatea atașată mulțimii X*. De exemplu, $\bar{D}$ este mulțimea animalelor care **nu** *sînt bune de mascotă*, $\bar{J}$ este mulțimea animalelor care **nu** *sînt atașate de mine* etc.) Rescriem în termeni de mul-

ţimi premisele şi concluzia (semnul $\subseteq$ notează relaţia de incluziune între mulţimi):

1. $A \subseteq B$	6. $J \subseteq A$
2. $C \subseteq D$	7. $K \subseteq \bar{D}$
3. $E \subseteq F$	8. $I \subseteq G$
4. $G \subseteq H$	9. $\bar{J} \subseteq E$
5. $B \subseteq I$	10. $H \subseteq C$,

de unde trebuie să rezulte $K \subseteq F$.

Iată rezolvarea simbolică a problemei: Folosind tranzitivitatea relaţiei de incluziune, obţinem următorul şir de incluziuni (deasupra fiecărui semn $\subseteq$ am scris premisa folosită):

$$J \overset{6}{\subseteq} A \overset{1}{\subseteq} B \overset{5}{\subseteq} I \overset{8}{\subseteq} G \overset{4}{\subseteq} H \overset{10}{\subseteq} C \overset{2}{\subseteq} D.$$

Prin urmare, $J \subseteq D$. Această relaţie este echivalentă cu $\bar{D} \subseteq \bar{J}$. Avem însă şi următorul şir de incluziuni:

$$\bar{J} \overset{9}{\subseteq} E \overset{3}{\subseteq} F$$

Adăugînd şi incluziunea anterioară, obţinem

$$\bar{D} \subseteq \bar{J} \subseteq E \subseteq F$$

deci $\bar{D} \subseteq F$. Folosind şi relaţia 7, $K \subseteq \bar{D}$, obţinem $K \subseteq \bar{D} \subseteq F$ de unde $K \subseteq F$, adică exact relaţia cerută de concluzie.

Sper că cititorul este deja convins de frumuseţea literară şi de ingeniozitatea logică a problemelor lui Lewis Carroll pentru a fi de acord că Bertrand Russell nu avea deloc dreptate atunci cînd spunea că „singurele descoperiri însemnate ale lui Carroll sînt două paradoxuri logice, publicate ca glume" (M. Gardner, *Alte amuzamente matematice*. Edit. Ştiinţifică, Bucureşti, 1970). Ca un argument în plus, iată încă o problemă a lui Dodgson-Carroll. Dacă:

(P4) 1. *Toţi cei care nu mănîncă chifle sînt bătrîni.*

2. *Porcii care suferă de ameţeli sînt trataţi cu respect.*

3. *Un înţelept care călătoreşte cu balonul îşi ia umbrela cu el.*

4. *Nici o fiinţă care arată caraghios şi mănîncă chifle nu trebuie să-şi ia prînzul în public.*

5. *Fiinţele tinere care se urcă în balon suferă de ameţeli.*

6. *Ființele grase care sînt caraghioase pot să-și ia prînzul în public dacă nu dansează pe sîrmă.*
7. *Nici o ființă înțeleaptă nu dansează pe sîrmă dacă suferă de amețeli.*
8. *Un porc avînd o umbrelă este caraghios.*
9. *Toți cei care nu dansează pe sîrmă și care sînt tratați cu respect sînt grași.*

atunci să se obțină concluzia că *„Nici un porc tînăr și înțelept nu se urcă în balon"*.

Aceasta este una dintre cele mai complicate probleme ale lui Lewis Carroll, iar rezolvarea cu ajutorul teoriei mulțimilor face apel la cîteva noțiuni în plus față de problema anterioară. Această rezolvare poate fi urmărită și pe schema din figura 1 (în dreptunghiuri sînt trecute proprietățile care identifică mulțimile de ființe care apar în problemă, iar în cercurile

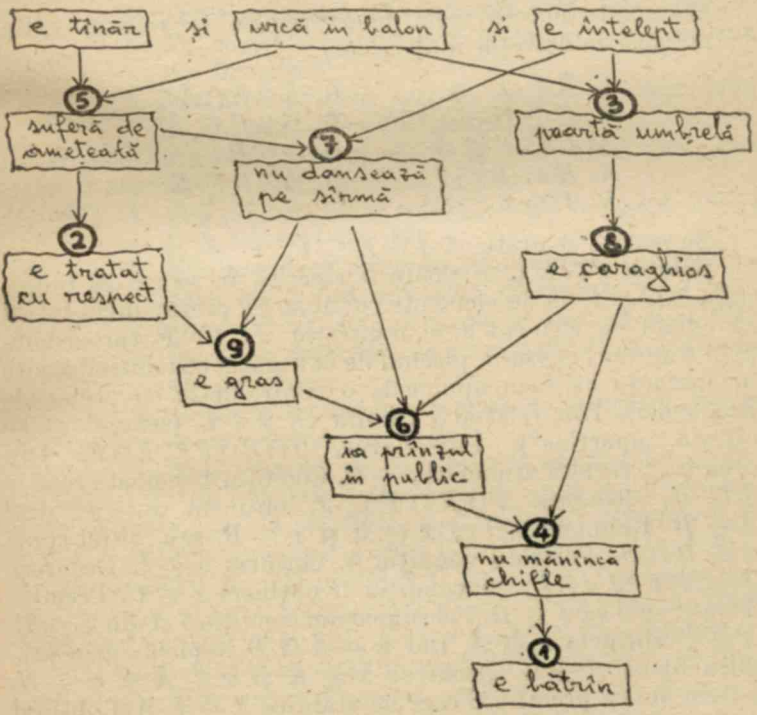

Fig. 1

din vîrfurile săgeților sînt indicate premisele folosite la pasul respectiv al raționamentului.

Să identificăm cele 11 mulțimi de ființe (aceasta este cea mai generală categorie de „obiecte" care include participanții la acțiunile implicate în premise) din problemă astfel:

A = mulțimea celor care *dansează pe sîrmă*,
B = mulțimea celor care *mănîncă chifle*,
C = mulțimea celor care *suferă de ameteli*,
D = mulțimea celor care *sînt tratați cu respect*,
E = mulțimea celor *înțelepți*,
F = mulțimea celor care *urcă în balon*,
G = mulțimea celor care *poartă umbrelă*,
H = mulțimea celor *caraghioși*,
I = mulțimea celor care *își iau prînzul în public*,
J = mulțimea celor *tineri*,
K = mulțimea celor *grași*.

Cu aceste notații, cele două premise se rescriu astfel ($\cap$ notează intersecția mulțimilor):

1. $\bar{B} \subseteq \bar{J}$
2. $C \subseteq D$
3. $E \cap F \subseteq G$
4. $H \cap B \subseteq \bar{I}$
5. $J \cap F \subseteq C$.
6. $K \cap H \cap \bar{A} \subseteq I$
7. $E \cap C \subseteq \bar{A}$
8. $G \subseteq H$
9. $\bar{A} \cap D \subseteq K$

Se cere să se arate că $J \cap E \subseteq \bar{F}$.

Relația $J \cap E \subseteq \bar{F}$ poate fi rescrisă în sensul că mulțimile E, J și F nu au elemente comune. Să presupunem totuși că există un element x în mulțimea $J \cap E \cap F$ (procedăm, prin *reducere la absurd*, plecînd de la negația concluziei dorite în speranța că vom ajunge la o contradicție cu premisele problemei). Din relația 3 rezultă că $x \in G$ (semnul $\in$ se citește „aparține"). Într-adevăr, $J \cap E \cap F \subseteq E \cap F$. Din premisa 8 rezultă atunci că $x \in H$. Condiția 1 se poate rescrie $J \subseteq B$; deoarece $J \cap E \cap F \subseteq J$, obținem $x \in J$, deci $x \in B$. Reținem deci că $x \in H$ și $x \in B$, sau, altfel spus, $x \in B \cap H$. Folosind condiția 4, obținem $x \in \bar{I}$. Deoarece $J \cap E \cap F \subseteq J \cap F$, cu condiția 5 obținem $x \in C$. Premisa 2 arată apoi că $x \in D$. Folosim acum condiția 7 și din $x \in E$, $x \in C$ obținem $x \in \bar{A}$. Dar $x \in \bar{A} \cap D$ implică (prin premisa 9) că $x \in K$. Deoarece $x \in K$ și $x \in \bar{A}$ și $x \in H$, putem aplica premisa 6 care ne arată că $x \in I$. Am obținut deci relațiile simultane $x \in \bar{I}$ și $x \in I$, ceea ce este absurd,

un element nu poate fi în acelaşi timp într-o mulţime şi în complementara ei. Contradicţia arată că mulţimea $E \cap \cap J \cap F$ este vidă, deci concluzia problemei este adevărată.

După această „demonstraţie", amintind mai ales de lumea matematicii decît de lumea Alicei, cititorul este probabil dornic, în compensaţie, să recitească cel puţin cîteva capitole din cărţile dedicate eroinei preferate a lui Lewis Carroll. Îi doresc desfătare deplină, lăsîndu-i totuşi la îndemînă două probleme logice ale „dubletului" Dodgson-Carroll.

Prima problemă cere să se obţină concluzia „*Toate animalele din această curte rod ciolane*", din următoarele premise:

(P5) 1. *Eu am încredere în toate animalele care-mi aparţin.*
2. *Cîinii rod ciolane.*
3. *Eu nu admit în biroul meu alte animale decît pe cele care îşi cer iertare atunci cînd le pretinzi asta.*
4. *Toate animalele din această curte îmi aparţin.*
5. *Eu admit în biroul meu toate animalele în care am încredere.*
6. *Singurele animale care îşi cer iertare atunci cînd le pretinzi asta sînt cîinii.*

A doua problemă cere să se dovedească afirmaţia „*Lui John îi plac covrigii reci*", pe baza premiselor:

(P6) 1. *Toţi poştaşii de pe această stradă cumpără covrigi de la băcanul din colţ.*
2. *Nici un om cu părul lung nu poate să nu fie poet.*
3. *John nu a fost niciodată pe munte.*
4. *Verilor băcanului din colţ le plac covrigii reci.*
5. *În afara poştaşilor de pe această stradă, nimeni nu este poet.*
6. *În afara verilor lui, nimeni nu cumpără covrigi de la băcanul din colţ.*
7. *Toţi oamenii cu părul scurt au fost pe munte.*

Ca o indicaţie în rezolvarea acestor probleme, precizez doar că pentru prima premisele sînt folosite în ordinea 4, 1, 5, 3, 6, 2, iar pentru cea de a doua în ordinea 3, 7, 2, 5, 1, 6, 4.

Am amintit în paragraful 2.1 de cartea *Symbolic logic and the game of logic*, retipărită la Dover, New York, în 1958, după cărţile *Symbolic logic* şi *The game of logic*, publicate (în mai multe ediţii) la sfîrşitul secolului trecut de L. Carroll. Cartea este interesantă nu numai prin problemele sale — la care voi reveni imediat —, ci şi din alte motive, atît istorice,

cît și de conținut. Să ne amintim că acum un secol logica matematică abia se năștea, teoria mulțimilor de asemenea. Prima lucrare a lui L. Carroll face propuneri interesante în ambele aceste domenii (se introduc, de pildă, notații și reguli de calcul simbolic logic, utilizate și exemplificate în rezolvarea problemelor, precum și diagrame de reprezentare și operare cu mulțimi, opuse, cum spuneam, celor ale lui Euler-Wenn, consacrate astăzi). Din punct de vedere al conținutului, cartea excelează prin savoarea scriiturii, inclusiv în paragrafele „serioase". Iată, de exemplu, sfaturile pe care le dă Lewis Carroll cititorului în *Introducere* (sfaturi valabile oricînd și pentru multe alte genuri de cărți):

(1) „Începe cu începutul și nu-ți da voie să-ți satisfaci o cît de mică și inutilă curiozitate afundîndu-te în carte la întîmplare, de colo-colo. Așa ceva te-ar duce foarte probabil la a o arunca din mînă spunînd: «Este mult prea grea pentru mine!», pierzînd astfel șansa de a adăuga o mare cantitate la stocul tău de desfătare mintală".

(2) „Nu începe un capitol nou pînă nu ești sigur că ai înțeles întreaga parte a cărții parcursă pînă în acel moment."

(3) „Cînd ajungi la un pasaj pe care nu îl înțelegi, *citește încă o dată;* dacă nici acum nu înțelegi, *citește încă o dată.* Dacă nici după *trei* încercări nu reușești să înțelegi, atunci este foarte probabil că ai creierul puțin obosit. În acest caz, lasă cartea și ocupă-te de altceva, iar a doua zi, cînd vei fi din nou odihnit, este sigur că vei considera acel pasaj cu desăvîrșire ușor." (...)

(4) „Dacă se poate, găsește-ți un prieten genial cu care să citești împreună și cu care să discuți despre dificultățile întîlnite. (...) Eu, cînd ajung la ceva care mă încurcă, încep să vorbesc *cu voce tare*, chiar dacă sînt singur. Lucrurile pot fi explicate așa de clar pentru tine însuți! Și, știți, sîntem așa de răbdători cu noi înșine: nimeni nu a fost iritat vreodată de propria-i prostie..."

O ultimă frază pe care o consemnez din *Introducerea* la *Symbolic logic*: „Recreerea mintală este ceva de care toți avem nevoie pentru sănătatea noastră mintală".

După cum se vede, Lewis Carroll nu s-a recreeat numai pe sine, ci s-a trudit (pentru că *trudă* se numește activitatea de compunere a problemelor sale) să-i ajute și pe alții în această privință. Să-l urmăm, reluînd alte trei probleme

din cartea sa. Ce concluzii pot fi deduse din fiecare din următoarele seturi de premise?

(P7) 1. *Orice obiect care nu este absolut urît poate fi ținut în bibliotecă.*
2. *Nimic din ceea ce este acoperit cu o crustă de sare nu este vreodată complet uscat.*
3. *Nimic nu poate fi ținut în bibliotecă dacă nu este complet uscat.*
4. *Bărcile de pescuit sînt ținute totdeauna în apropierea mării.*
5. *Nimic din ceea ce provine de la o scoică nu este absolut urît.*
6. *Tot ceea ce este ținut în apropierea mării este acoperit cu o crustă de sare.*

(P8) 1. *Animalele sînt totdeauna teribil de ofensate dacă nu le bagi în seamă.*
2. *Toate animalele care îmi aparțin se găsesc în această curte.*
3. *Nici un animal nu știe să numere dacă nu a fost bine dresat la un circ serios.*
4. *Nici unul dintre animalele din această curte nu este bursuc.*
5. *Cînd un animal este teribil de ofensat, el începe să alerge fără rost și să urle.*
6. *Niciodată eu nu bag în seamă un animal care nu-mi aparține.*
7. *Nici un animal care a fost dresat la un circ serios nu aleargă fără rost și urlă.*

(P9) 1. *Toate scrisorile din această cameră care sînt datate, sînt scrise pe hîrtie albastră.*
2. *Nici o scrisoare nu este scrisă cu cerneală neagră, exceptîndu-le pe cele scrise caligrafic.*
3. *N-am pus în dosar nici una din scrisorile pe care nu le citesc cu foarte mare plăcere.*
4. *Nici o scrisoare scrisă pe o singură coală de hîrtie nu este nedatată.*
5. *Toate scrisorile cărora nu le-am făcut vreun semn sînt scrise cu cerneală neagră.*
6. *Toate scrisorile de la Mary încep cu „Dragă prietene".*
7. *Toate scrisorile scrise pe hîrtie albastră sînt puse la dosar.*

8. *Nici unei scrisori care are mai mult de o coală nu i-am făcut vreun semn.*
9. *Nici o scrisoare care începe cu „Dragă prietene" nu este scrisă caligrafic.*

Problemele anterioare sînt de un gen puțin diferit de cele discutate mai înainte, deoarece ele nu cer să se demonstreze că o concluzie *dată* este adevărată, ci cer și concluzia ce se desprinde dintr-un set de permise (concluzia cea mai generală, cea la construirea căreia concură *toate* premisele).

Formularea „încîlcită" a premiselor face, aparent, dificilă rezolvarea acestor probleme. Lucrurile pot fi însă simplificate folosind, din nou, elemente de teoria mulțimilor. Pentru exemplificare, mă voi referi la prima problemă, cea cu șase premise (P7). Ea se referă la *obiecte* și dintre acestea distinge următoarele mulțimi:

A = obiecte care *nu sînt absolut urîte*,
B = obiecte care *pot fi ținute în bibliotecă*,
C = obiecte *acoperite cu o crustă de sare*,
D = obiecte care *nu sînt complet uscate*,
E = *bărci de pescuit*,
F = obiecte *ținute lîngă mare*,
G = obiecte care *provin de la scoici*.

Cele șase premise stabilesc următoarele relații de incluziune între aceste mulțimi (uneori implicînd și complementarele lor):

1. $A \subseteq B$
2. $C \subseteq D$
3. $D \subseteq \bar{B}$
4. $E \subseteq F$
5. $G \subseteq A$
6. $F \subseteq C$.

Contînd pe faptul că problema este „corectă" (are soluție, nu este redundantă etc.) — și avem motive să credem că problemele lui Lewis Carroll sînt astfel — cele șase premise ar trebui să formeze un lanț de silogisme. În interiorul acestui lanț se vor găsi mulțimi de obiecte care apar în cel puțin două premise, altfel nu putem lega între ele două relații ca acelea de mai sus. În aceste relații, mulțimile E și G sînt folosite cîte o singură dată, deci ele nu pot apărea decît la capătul lanțului de silogisme. Prin urmare, concluzia celor șase premise trebuie să se refere la aceste mulțimi, stabilind deci o relație între mulțimea *bărcilor de pescuit* și *obiectele care provin de la scoici*. Această relație este *„Bărcile de pescuit*

nu provin de la scoici" și ea este probată de următorul șir de incluziuni

$$E \subseteq F \subseteq C \subseteq D \subseteq \bar{} \subseteq \check{A} \subseteq \check{G}$$

(folosim premisele în ordinea: 4, 6, 2, 3, 1, 5).

Pe o cale asemănătoare, din cele șapte premise ale problemei P8 se poate deduce că „*Animalele care știu să numere nu sînt bursuci*", în timp ce premisele problemei P9 justifică afirmația „*Eu citesc cu mare plăcere scrisorile pe care le primesc de la Mary*".

Probabil că cititorul este nemulțumit de faptul că toate aceste trei probleme, ca și multe altele dintre cele pe care le-am discutat, sînt „liniare", premisele se folosesc una după alta. Lewis Carroll are însă și probleme mai complicate, este adevărat, mai puține, deoarece depășeau intențiile cărților sale (iar o carte cu „nuci mai tari" — expresia îi aparține — nu a mai avut răgaz să o scrie, deși îi proiectase în detaliu conținutul). Iată totuși o problemă de o factură deosebită:

(P10) *Șase prieteni, împreună cu soțiile lor, locuiesc în același hotel. Zilnic ei ies la plimbare, în grupuri de mărimi diferite. Pentru a asigura o cît mai mare varietate acestor ieșiri, ei hotărăsc să urmeze următoarele reguli în constituirea grupurilor:*

1. *Dacă Acres este (în același grup) cu soția sa și Barry este cu soția sa, iar Eden este cu doamna Hall, atunci Cole va fi în același grup cu doamna Dix.*

2. *Dacă Acres este cu soția și Hall este cu soția, iar Barry este cu doamna Cole, atunci Dix nu va fi cu doamna Eden.*

3. *Dacă Dix și Cole și soțiile lor sînt în același grup, iar Acres nu este cu doamna Barry, atunci Eden nu va fi cu doamna Hall.*

4. *Dacă Acres este cu soția și Dix este cu soția, iar Barry nu este cu doamna Cole, atunci Eden va fi cu doamna Hall.*

5. *Dacă Eden este cu soția și Hall este cu soția și Cole este cu doamna Dix, atunci Acres nu va fi cu doamna Barry.*

6. *Dacă Barry și Cole și soțiile lor sînt în același grup, iar Eden nu este cu doamna Hall, atunci Dix va fi cu doamna Eden.*

Problema cere să se arate că în fiecare zi există cel puțin un cuplu soț-soție care nu ies în același grup.

Există foarte multe moduri în care putem împărți în 2, 3, 4,... subgrupuri mulțimea celor 12 persoane (există

$2^{12} - 1 = 4\,095$ de submulțimi cu cel puțin o persoană). O „cale" de rezolvare a problemei este de a investiga toate aceste posibilități, arătînd că fiecare variantă care respectă toate cele șase reguli conduce într-adevăr la concluzia cerută. Evident, o asemenea cale este stupidă, fiind excesiv de laborioasă. „Iată la ce este bună logica simbolică!" ar fi exclamat probabil Lewis Carroll, pregătind o rezolvare elegantă a ei. Așa cum am spus, din păcate, el s-a stins înainte de a scrie cartea în care asemenea probleme ar fi fost, poate, tratate simbolic, pe o cale sistematică. În lipsa unei asemenea abordări „istorice", să încercăm o rezolvare a problemei folosind elemente moderne de calcul propozițiilor.

Să notăm cu A, B, C, D, E, H cei șase soți, Acres, Barry, Cole, Dix, Eden, Hall, și cu a, b, c, d, e, h cele șase soții corespunzătoare. Problema se referă la afirmații asupra unor perechi ale acestor douăsprezece persoane și anume, la situația lor de a fi sau nu împreună, în același grup. Vom nota cu $G(x, y, z,...)$ afirmația „persoanele x, y, z,... sînt împreună". Vom nota, de asemenea, ca în logică, cu $p \,\&\, q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $\neg p$ propozițiile compuse „p și q", „p sau q" „p implică q" și, respectiv, „*non* p". În acest cadru, cele șase condiții de formare a grupurilor se rescriu astfel:

1. $G(a, A) \,\&\, G(b, B) \,\&\, G(E, h) \Rightarrow G(C, d)$
2. $G(a, A) \,\&\, G(h, H) \,\&\, G(B, c) \Rightarrow \neg G(D, e)$
3. $G(c, C, d, D) \,\&\, \neg G(A, b) \Rightarrow \neg G(E, h)$
4. $G(a, A) \,\&\, G(d, D) \,\&\, \neg G(B, c) \Rightarrow G(E, h)$
5. $G(e, E) \,\&\, G(h, H) \,\&\, G(C, d) \Rightarrow \neg G(A, b)$
6. $G(b, B, c, C) \,\&\, \neg G(E, h) \Rightarrow G(D, e)$.

Conjuncția acestor implicații trebuie să implice propoziția

$$\neg G(a, A) \vee \neg G(b, B) \vee \neg G(c, C) \vee \neg G(d, D) \vee$$
$$\vee \neg G(e, E) \vee \neg G(h, H).$$

Folosind faptul că $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ și proprietățile conectorilor $\&$, $\vee$, $\neg$, se poate arăta pe o cale pur simbolică, formală, că această implicație este adevărată. Sarcina (plictisitoare totuși) este lăsată în seama cititorului interesat în asemenea calcule. Să „scurtcircuităm" însă puțin această cale, raționînd direct asupra propozițiilor considerate mai sus. Să presupunem că cele șase premise *nu* implică propoziția dorită (pornim deci din nou un raționament *prin reducere la absurd:* din negația concluziei și din cele șase premise puse

laolaltă, încercăm să deducem o contradicție; cum cele șase premise sînt considerate adevărate, ar rezulta atunci că această contradicție provine din presupunerea că propoziția-concluzie nu este adevărată, deci ar rezulta că ea *este* adevărată). Sînt deci verificate toate propozițiile:

$G(a, A)$, $G(b, B)$, $G(c, C)$, $G(d, D)$, $G(e, E)$, $G(h, H)$.

Să privim prima premisă. $G(a, A)$ și $G(b, B)$ sînt adevărate.

Cazul 1. $G(E, h)$ este adevărată. Din premisa 1 obținem deci că avem și $G(C, d)$. Premisa 5 implică atunci $\neg G(A, b)$. Dar $G(C, d)$ împreună cu $G(c, C)$, $G(d, D)$ implică $G(c, C, d, D)$, deci, conform premisei 3, trebuie să avem $\neg G(E, h)$. Am plecat de la $G(E, h)$ și am obținut $\neg G(E, h)$. Cazul 1 conduce deci la o contradicție.

Cazul 2. Să presupunem că $\neg G(E, h)$ este verificată. Conform condiției 4, trebuie să avem atunci $G(B, c)$; aceasta face însă adevărate premisele de aplicare atît ale condiției 2 cît și ale condiției 6, cu alte cuvinte, avem simultan $\neg G(D, e)$ (din 2) și $G(D, e)$ (din 6). Și acest caz conduce la o contradicție.

În concluzie, indiferent dacă $G(E, h)$ este adevărată sau falsă, obținem o contradicție, ceea ce arată că presupunerea că toate propozițiile

$G(a, A)$, $G(b, B)$, $G(c, C)$, $G(d, D)$, $G(e, E)$, $G(h, H)$

sînt adevărate este contradictorie în raport cu cele 6 premise. (De remarcat că toate aceste propoziții sînt implicate în premise.) Măcar una dintre cele șase propoziții $G(x, X)$ nu este adevărată, deci măcar un cuplu trebuie separat. Ceea ce trebuia demonstrat.

Se poate vedea ușor că există numeroase posibilități de împărțire a celor 12 persoane în grupuri care să satisfacă cele șase condiții. De exemplu, separînd toate soțiile de soții lor, obținem o asemenea repartizare; analog dacă doamnele Acres și Barry formează un grup și celelalte persoane altul. Cititorul este îndemnat să descopere și alte asemenea variante. Care este numărul lor?

Dar să revenim la problemele de primul tip. Iată încă o listă, cuprinzînd șase exemplare. Ele vor cere și *identificarea* concluziei ce se desprinde dintr-un set de premise și *demonstrarea* acestei concluzii. Cititorii mai puțin răbdători pot citi încă de la început și concluziile (sînt date toate o dată, după prezentarea problemelor), rămînîndu-le deci numai a le justifica. Bineînțeles, problemele pot fi rezolvate ușor după rețeta folosită în rezolvarea problemei P7 (identificarea capetelor

lanțului de incluziuni între mulțimile de animale, poeme, idei etc. ce apar în aceste probleme). Aici vor fi prezentate numai rezolvări verbale ale problemelor (folosind implicit faptul că se cunoaște concluzia dorită).

(P11) 1. *Orice budincă este delicioasă.*
2. *În această farfurie se găsește o budincă.*
3. *Nici un aliment delicios nu este dăunător.*

(P12) 1. *Este foarte interesant să-l asculți pe vecinul meu vorbind despre istoria Franței.*
2. *Nici un om nu poate da detalii despre bătălia de la Waterloo dacă n-a citit memoriile lui Napoleon.*
3. *Nici un om nu este interesant atunci cînd vorbește despre istoria Franței dacă nu poate da detalii despre bătălia de la Waterloo.*

(P13) 1. *Obiectele cumpărate de la vînzătorii ambulanți nu sînt niciodată de mare valoare.*
2. *Nimic altceva nu poate fi obținut pe degeaba decît vechiturile.*
3. *Ouăle de struț cenușiu sînt foarte valoroase.*
4. *Vînzătorii ambulanți nu vînd decît lucruri care sînt într-adevăr vechituri.*

(P14) 1. *Nici un poem interesant nu rămîne neanalizat de criticii literari serioși.*
2. *Toate textele poetice moderne sînt puțin afectate.*
3. *Toate poemele scrise de X au ca subiecte baloanele de săpun.*
4. *Nici un text poetic afectat nu este analizat de criticii literari serioși.*
5. *Nici un poem demodat (ne-modern) nu are ca subiect baloanele de săpun.*

(P15) 1. *Animalele care nu lovesc cu piciorul sînt totdeauna greu de înfuriat.*
2. *Animalele din curtea mea nu au coarne.*
3. *Un taur poate oricînd să arunce pe cineva peste gard.*
4. *Nici un animal care lovește cu piciorul nu poate fi tras de coadă.*
5. *Nici un animal fără coarne nu poate să arunce pe cineva peste gard.*
6. *Toate animalele sînt ușor de înfuriat, cu excepția taurilor.*

(P16) 1. *Toate ideile mele care nu pot fi exprimate sub forma unor silogisme sînt complet ridicole.*
2. *Nici una dintre ideile mele privind creşterea viermilor de mătase nu merită a fi consemnată pe hîrtie.*
3. *Nici o idee de-a mea care nu este realizabilă nu poate fi exprimată sub forma unui silogism.*
4. *Eu nu am nici o idee ridicolă pe care să n-o pun în seama profesorului meu de logică.*
5. *Toate planurile mele de viitor se referă la creşterea viermilor de mătase.*
6. *Eu nu pun în seama profesorului meu de logică nici o idee care nu merită a fi consemnată pe hîrtie.*

Concluzii:

(P11) *În această farfurie se găseşte un aliment care nu este dăunător.*

(P12) *Vecinul meu a citit memoriile lui Napoleon.*

(P13) *Ouăle de struţ cenuşiu nu pot fi obţinute pe degeaba.*

(P14) *Toate poemele scrise de X sînt neinteresante.*

(P15) *Animalele din curtea mea nu pot fi trase de coadă.*

(P16) *Toate planurile mele de viitor sînt realizabile.*

Rezolvări:

(P11) *În această farfurie se găseşte o budincă* (premisa 2), deci *un aliment delicios* (premisa 1), prin urmare (premisa 3), *ceea ce se găseşte în această farfurie nu este dăunător.*

(P12) *Vecinul meu vorbeşte interesant despre istoria Franţei* (premisa 1), deci *el poate da detalii despre bătălia de la Waterloo* (premisa 3), deci *el a citit memoriile lui Napoleon* (premisa 2).

(P13) *Ouăle de struţ cenuşiu sînt valoroase* (premisa 3), deci *nu pot fi cumpărate de la vînzătorii ambulanţi* (premisa 1), prin urmare, *ele nu sînt vechituri* (premisa 4), deci *nu pot fi obţinute pe degeaba* (premisa 2).

(P14) *Poemele lui X au ca subiect baloanele de săpun* (premisa 3), deci *sînt moderne* (premisa 5), ceea ce atrage după sine faptul că *sînt puţin afectate* (premisa 2). Atunci, *poemele lui X nu sînt analizate de criticii literari serioşi* (premisa 4), în concluzie, *nu sînt interesante* (premisa 1).

(P15) *Animalele din curtea mea nu au coarne* (premisa 2), deci *nu pot arunca pe cineva peste gard* (premisa 5), prin urmare, *animalele din curtea mea nu sînt tauri* (premisa 3).

În aceste condiții, *aceste animale sînt ușor de înfuriat* (premisa 6), deci *ele lovesc cu piciorul* (premisa 1) și, în consecință, *ele nu pot fi trase de coadă* (premisa 4).

(P16) *Toate planurile mele se referă la creșterea viermilor de mătase* (premisa 5), deci *nu merită a fi consemnate pe hîrtie* (premisa 2), prin urmare, *eu nu pun aceste planuri în seama profesorului meu de logică* (premisa 6). Rezultă atunci că *planurile mele nu sînt ridicole* (premisa 4), deci *pot fi exprimate sub forma unor silogisme* (premisa 1) și, în concluzie, *sînt realizabile* (premisa 3).

3.1. Nouă probleme

Numele lui Sam Loyd este probabil bine cunoscut cititorului, de pildă, în legătură cu jocul „15", cel care în anii '70 ai secolului trecut provoca o rumoare comparabilă cu cea motivată în zilele noastre de cubul lui Rubik. Născut în anul 1841 și decedat în 1911, Sam Loyd, unanim considerat cel mai mare enigmist al Americii, a fost cîteva decenii titularul mai multor rubrici de probleme distractive, în mai multe reviste, popularitatea sa fiind extraordinară. E adevărat, și modul în care își „vindea marfa" era deosebit, majoritatea problemelor sale fiind însoțite de desene și istorioare amuzante, iar soluțiile problemelor mai dificile erau răsplătite cu premii (uneori promitea premii mari și pentru probleme care nu aveau soluție — cazul mai-sus-amintitului joc „15"). După moartea sa, în 1914, a apărut o carte uriașă, *Cyclopedia of puzzles*, editată de fiul lui, „cea mai mare și mai incitantă colecție de jocuri strînse vreodată între coperțile unui singur volum". Citatul anterior este scos din prefața lui Martin Gardner la volumul *Mathematical puzzles of Sam Loyd*, apărut sub îngrijirea sa la Editura Dover, New York, 1959. Din această carte extrem de interesantă voi prezenta în continuare cîteva „încurcături de minte" inventate de Sam Loyd și mai puțin cunoscute la noi. (Trebuie spus că multe probleme ale lui S. Loyd au trecut în decursul timpului în „folclor" sau sînt considerate ca atare de semnatarii unor cărți sau rubrici de profil care „uită" să mai menționeze și numele inventatorului lor. *Oneste bibere*, totuși...)

Iată o primă problemă, aproape banală (după ce veți vedea soluția): desenul din figura 2 reprezintă — reproduc aproximativ prezentarea lui Loyd — harta ultimelor descoperiri privind canalele marțiene și orașele pe care acestea le leagă. Litera *A* din partea de jos indică un oraș aflat la polul sud al planetei. Problema cere să se găsească un drum care începe în acest oraș, trece prin toate orașele cîte o sin-

Fig. 2

gură dată (în termeni de teoria grafurilor, problema revine deci la căutarea unui *drum hamiltonian)*, se reîntoarce la polul sud și poate fi descris de o propoziție corectă în limba... română (la Loyd era în engleză, desigur). Sam Loyd mărturisește că atunci cînd a publicat pentru prima dată această problemă, „mai mult de cincizeci de mii de oameni i-au scris că «așa ceva nu este posibil»". Și totuși, problema este foarte ușoară." Încercați, înainte de a citi soluția.

De fapt, nici nu este posibil „înainte", deoarece ați văzut deja cheia problemei! Cei cincizeci de mii de cititori care-i „scriseseră" lui Loyd că AȘA CEVA NU ESTE POSIBIL dezlegaseră, de fapt, problema, deoarece chiar această propoziție marchează un drum care îndeplinește toate cerințele formulate. O problemă foarte simplă, nu? de vreme ce conține rezolvarea în însuși enunțul său...

Iată încă o problemă „ciudată". La un moment dat, Loyd, de altfel un șahist precoce și de mare talent, a anunțat că a descoperit un mod de a face mat regele advers la mijlocul tablei, folosind numai două ture și un cal! (În rest, tabla este goală...) Culmea — deși șahiștii nu vor crede — performanța este și posibilă. Indicație (care n-o să vă folosească probabil prea mult): regele se află în șah de la ambele ture deodată.

Soluția este prezentată în figura 3! Desigur, numai Sam Loyd ar fi putut spune cum se ajunge la această situație (probabil, mutînd ambele ture deodată, cu amîndouă

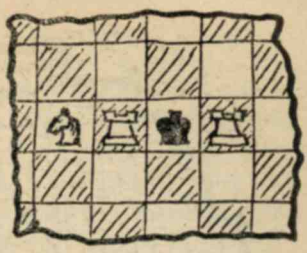

Fig. 3

mîinile!), dar, trebuie să recunoaștem, regele negru este, într-adevăr, făcut *mat*....

Nu trebuie cumva dedus din aceste exemple că toate problemele lui Loyd sînt la fel de „neserioase". Iată una impresionantă la prima vedere (și chiar la a doua vedere, deși mecanismul ei nu este totuși prea complicat). Priviți figura 4. Plecînd din pătratul din centru (cel care conține cifra 3 încercuită), deplasați-vă trei căsuțe în orice direcție doriți — orizontal, vertical sau oblic. În căsuța de sosire găsiți o nouă cifră. Deplasați-vă din nou, în orice direcție doriți, cu atîtea căsuțe cît arată această cifră. Și așa mai departe, scopul fiind de a ieși din „jungla" acestor cifre și anume, exact dincolo de marginea tabloului. (S. Loyd formulează problema chiar în termenii ieșirii dintr-o pădure; iar la marginea pădurii, cel care descoperea drumul pînă acolo găsea un premiu, pe care Loyd nu-l precizează însă.)

Dacă adăugăm și faptul că soluția este unică și că există și un mod logic de a o găsi (care nu exclude totuși unele încercări), atunci problema devine cu adevărat respectabilă. Înainte însă de a prezenta soluția propriu-zisă a problemei, iată raționamentul care conduce la găsirea ei. Pentru a ajunge dincolo de marginea amețitorului tablou de cifre, la ultima „mutare" trebuie plecat dintr-o căsuță aflată la n pași de margine și care are înscrisă în ea cifra $n + 1$. Să explorăm sistematic această posibilitate, linie cu linie, de sus în jos, de exemplu. Primul candidat care se oferă este căsuța din extrema stîngă a liniei 3. De unde se poate ajunge aici printr-o mutare corectă? Plecăm în toate direcțiile posibile (numai patru în acest caz), numărînd căsuțele pînă ce, sau ajungem să pronunțăm cifra 9, sau găsim o căsuță care are înscrisă în ea cifra la care tocmai am ajuns cu numărătoarea. Avem o singură șansă: să venim din căsuța marcată cu 2,

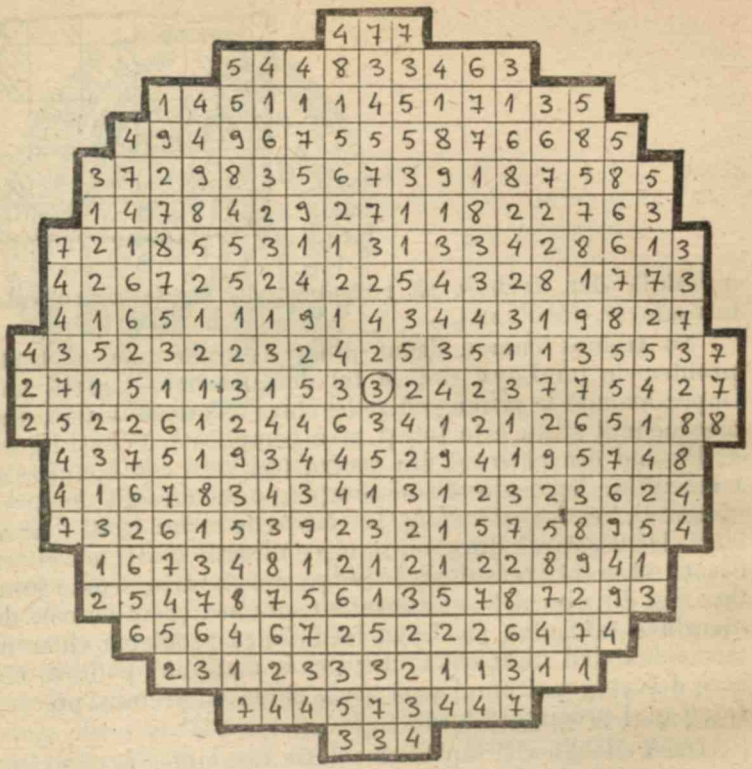

Fig. 4

aflată pe verticala căsuței 1 de plecare. Repetăm acum explorarea, plecînd din această căsuță 2: de unde putem veni aici? Avem două posibilități: una dinspre est (căsuța 3) și una dinspre sud-vest (căsuța 2). Ne ramificăm de fiecare dată de cîte ori este cazul, în speranța că sau vom ajunge în centrul tabloului, sau drumul se va „înfunda". Iată o fundătură: est 3, nord-est 3, sud-est 4 și gata, nici o continuare nu mai este posibilă.

Alergînd în felul acesta de colo-colo, vom ajunge (dacă avem suficientă răbdare, desigur) să încercăm și căsuța a treia de pe linia a cincea de jos, cea marcată cu cifra 4 și care permite ieșirea spre nord-vest sau spre sud-est. Aceasta este

soluția; formulată dinspre centru, ea este compusă din următorii pași: sud-vest 4, sud-vest 6, nord-est 6, nord-est 2, nord-est 5, sud-vest 4, sud-vest 4, sud-vest 4 și, în sfîrșit, nord-vest sau sud-est afară. O simplă pendulare pe diagonala sud-vest nord-est deci.

Să trecem însă la probleme și mai „serioase". Iată una care ar face cinste unui manual de algebră elementară, cel puțin pentru că ar mai introduce oarece variație în peisajul trenurilor care aleargă unele după altele sau chiar unele către altele și al robinetelor curgînd în contradictoriu, unul deasupra căzii și unul dedesubt. În versiunea lui Loyd ea era desenată și o voi prelua ca atare (simplificînd însă desenul): cîte bile trebuie puse în talerul din partea dreaptă al balanței din figura 5c pentru a o echilibra, dacă în figurile 5a și 5b balanța este echilibrată?

Un simplu sistem de două ecuații cu două necunoscute conduce rapid la soluție. Se poate ajunge însă la soluție și mai rapid și mai elegant: să înlocuim în figura 5a triunghiul din stînga cu un pătrat și opt bile, așa cum ne indică figura 5b. Putem acum îndepărta cîte opt bile de pe fiecare taler și echilibrul se va păstra, egalîndu-se deci greutatea a patru pătrate cu cea a patru bile. Rezultă deci că o bilă este la fel de grea ca un pătrat. Conform figurii 5b, triunghiul cîntărește deci cît nouă bile împreună, și, gata, acesta este răspunsul!

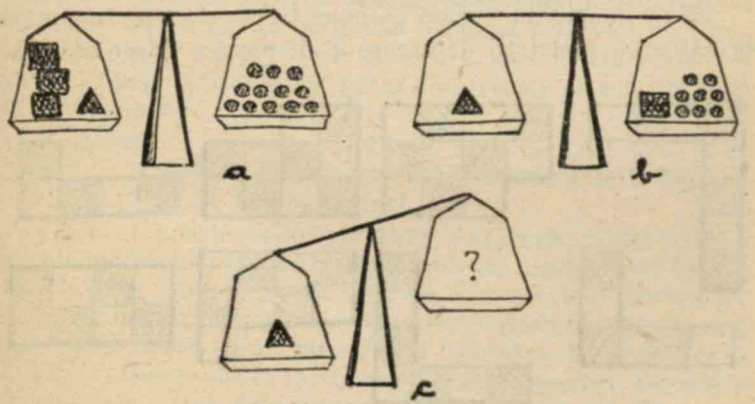

Fig. 5

În capitolul 5 voi discuta mai multe probleme de genul „acoperiți tabla de șah cu următoarele piese". Problemele de acest gen sînt mai bine cunoscute de cîteva decenii, după ce matematicianul Solomon Golomb a „teoretizat" domeniul (un articol în „The American Mathematical Monthly", apoi chiar o carte). Sam Loyd este însă un precursor în această direcție. Iată o problemă a sa de acest gen, împreună cu anecdota aferentă: „În istoria Franței este întîlnită o întîmplare amuzantă, privind modul în care prințul moștenitor a scăpat de un mat imparabil în timp ce juca șah cu ducele de Burgundia, spărgîndu-i acestuia tabla de șah în cap. Istorioara este citată adesea de către cei care scriu despre șah pentru a demonstra astfel că nu este totdeauna diplomatic să joci pentru a cîștiga și ea a dat naștere unei puternice scheme de atac în acest joc, schemă numită gambitul regelui". Textul anterior este însoțit de Sam Loyd de un desen reprezentînd momentul de vîrf al „partidei" și din desen se vede că tabla a fost spartă în opt piese, cele din figura 6. Problema cere, desigur, să se reconstituie tabla de șah din aceste opt bucăți. Soluția este prezentată în figura 7 (presupun că ați găsit-o singuri, înainte de a privi această figură).

Varietatea problemelor lui Loyd este extraordinară. Voi consemna în continuare încă patru exemple din cartea editată de M. Gardner.

Să ne imaginăm o scară cu nouă trepte și să ne impunem următoarele restricții de urcare a ei: plecăm de pe sol și la

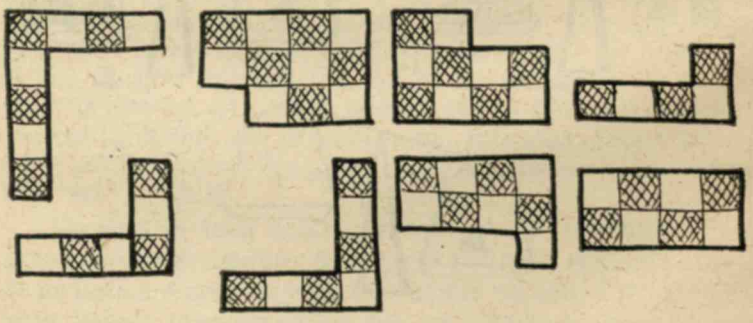

Fig. 6

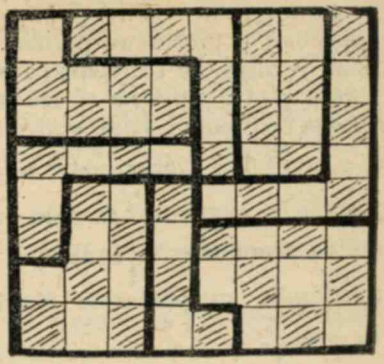

Fig. 7

fiecare pas putem urca sau cobori o treaptă. Vom „pendula" în sus și în jos pe această scară astfel încît:

— să revenim exact o dată înapoi pe sol,

— pe ultima treaptă să călcăm de două ori,

— pe fiecare dintre celelalte trepte să călcăm de același număr de ori.

Care este numărul minim de pași în care poate fi urcată această scară? De pildă, urcînd o dată pînă sus, coborînd apoi și urcînd din nou, realizăm obiectivul propus în 27 de pași (toate condițiile din problemă sînt verificate). Există însă și o soluție în numai 19 pași și aceasta este cea mai bună. Într-adevăr, deoarece trebuie să revenim pe sol, rezultă că pe treapta 1 păşim cel puțin de două ori, deci pe toate treptele păşim cel puțin de două ori, deci facem astfel cel puțin 18 pași. Adăugînd și pasul de revenire pe sol, obținem valoarea optimă, 19.

Iată această soluție: sol, 1, sol, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 9, 8, 9 (am notat cu cifre de la 1 la 9 treptele scării, numerotate de jos în sus).

La fel cu problema cu echilibrarea balanței, multe probleme ale lui Sam Loyd pot fi ușor rezolvate algebric sau făcînd apel la alte cunoștințe matematice. Uneori chiar soluția lui Loyd era bazată pe asemenea cunoștințe. Asemenea probleme, mai puțin „distractive" poate (deși formulate tot anecdotic), sînt însă interesante ca modele de probleme școlare, atractive și inedite în formă. Iată cîteva mostre de acest gen, fără a da aici și rezolvarea completă.

„Doi sirieni cinstiți și-au unit economiile și au cumpărat împreună o piatră de polizor. Deoarece ei locuiau departe unul de altul, au convenit ca cel mai bătrîn dintre ei să folosească piatra pînă ce ea se va reduce la jumătate, apoi să i-o dea celuilalt. Inițial, piatra avea 22 de centimetri diametru și o gaură de $3\frac{1}{7}$ centimetri în centru. Care va fi diametrul pietrei în momentul în care ea trebuie înmînată celui de-al doilea proprietar?" (Indicație: ariile a două cercuri sînt proporționale cu pătratele diametrelor lor. Răspunsul este: $15\frac{5}{7}$ cm).

„Un iaht trebuie să parcurgă un triunghi echilateral A, B, C, plecînd din A. Pe iaht, trei persoane, Smith, Brown și Jones, încearcă să înregistreze viteza vasului, dar, avînd toți trei rău de mare, nu reușesc decît să rețină informații incomplete. Concret, Smith a observat că iahtul a parcurs primele trei sferturi ale cursei în trei ore și jumătate, John și-a notat doar că ultimele trei sferturi ale drumului au fost parcurse în patru ore și jumătate, iar Brown a fost atît de preocupat de revenirea pe pămînt încît n-a observat altceva decît că pentru a parcurge distanța de la B la C au fost necesare cu 10 minute mai mult decît pentru distanța de la A la B. Presupunînd că pe fiecare latură a triunghiului iahtul a avut viteza constantă, să se determine durata parcurgerii întregului traseu."

(Notînd cu x durata parcurgerii segmentului AB, cu y durata trecerii de la C la A, rezultă că de la B la C se fac $x + 10$ minute, iar observațiile lui Smith și John conduc la ecuațiile

$$x + x + 10 + y/4 = 210 \text{ min.}$$
$$x/4 + x + 10 + y = 270 \text{ min,}$$

de unde valorile lui x și y pot fi acum deduse cu ușurință.)

„Care este numărul maxim de bucăți în care poate fi tăiată o bucată cilindrică de brînză, prin șase tăieturi, cu ajutorul unui cuțit suficient de lung?" (Sam Loyd formulează problema în centrul unei istorioare de o pagină întreagă, cu un soldat expert în împărțirea brînzei între camarazii lui și care era un la fel de mare maestru în împărțirea plăcintei etc. etc., dar nu mai reiau aceste detalii.)

(Fără a da explicații asupra modului în care a ajuns la soluție, Loyd precizează că printr-o tăietură se obțin două bucăți, prin două se obțin patru, prin trei tăieturi se obțin opt bucăți, prin patru 15, prin cinci se obțin 26, iar prin șase tăieturi se obțin 42 de bucăți. Martin Gardner adaugă în cartea menționată că aceste numere sînt primele valori ale expresiei

$$\frac{n^3 + 5n}{6} + 1$$

reprezentînd numărul maxim de piese care pot fi obținute în urma a n secționări ale unui corp convex.)

3.2. Jocul 14—15

Probabil că cel mai cunoscut joc al lui Sam Loyd rămîne totuși cel prezent și în magazinele noastre sub numele PERSPICO și lansat de Loyd sub numele 14—15 (cunoscut și sub numele de *jocul 15*, mai scurt). Presupunînd că cititorul nu cunoaște jocul, menționez că este vorba de o cutie pătrată în care se așază 15 pătrate numerotate de la 1 la 15 și care pot luneca în pătratul rămas liber (fig. 8). Cele 15 piese pot fi scoase din cutie și apoi pot fi reintroduse în ordine arbitrară; problema constă atunci în a reface ordinea inițială a pieselor, mișcîndu-le în cutie, prin intermediul locului gol (translatînd piesele pe orizontală și pe verticală). (Varianta PERSPICO nu mai permite scoaterea pieselor din cutie, ci numai translatarea lor, ceea ce face jocul ceva mai neinteresant din punct de vedere matematic.)

De fapt, Loyd a lansat jocul în legătură cu o problemă particulară: să se readucă piesele la ordinea din figura 8, plecînd de la poziția din figura 9 (de unde și denumirea jocului). El promitea și un premiu celui (celor) care ar fi reușit acest lucru și anume 1 000 de dolari! Succesul jocului a fost enorm, pentru că și calitățile sale erau remarcabile: simplu, ușor de manevrat, inedit, dificil de rezolvat, prezentat atrăgător și însoțit de un premiu consistent.

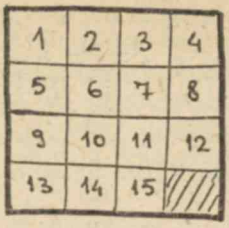

Fig. 8

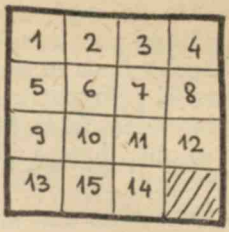

Fig. 9

De fapt, Sam Loyd nu risca nimic lansînd o asemenea provocare: problema lui pur şi simplu nu avea soluţie! Aceasta nu înseamnă că foarte mulţi oameni nu au încercat s-o rezolve, mişcînd cu frenezie plăcuţele numerotate, în speranţa că într-o bună zi gloria şi dolarii lui Sam Loyd le vor ieşi în cale. În realitate, numai jumătate din numărul enorm al configuraţiilor posibile ale jocului (20 922 789 888 000=16 factorial) pot fi duse, prin mutări regulamentare, fără a scoate piesele din cutie, în configuraţia din figura 8.

Acest fapt poate fi stabilit foarte uşor folosind cîteva noţiuni simple din algebra grupurilor de permutări.

Să considerăm o *permutare* (rearanjare) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a numerelor $1, 2, \ldots, n$. Spunem că în această permutare există o *inversiune* pe poziţiile i, j dacă i este mai mic decît j, dar p_i este mai mare decît p_j.

Exemplu: în permutarea 1, 3, 4, 2 a numerelor 1, 2, 3, 4, există două inversiuni şi anume, pe poziţiile 2, 4 şi pe poziţiile 3, 4 ($2 < 4$ dar $p_2 = 3$, $p_4 = 2$, $p_2 > p_4$ etc.).

O permutare se spune că este *pară* dacă ea conţine un număr par de inversiuni şi *impară* în caz contrar. (Permutarea 1, 3, 4, 2 este deci pară.) După o permutare (a unei mulţimi $1, 2, \ldots, n$) se poate aplica o altă permutare şi aşa mai departe. Spunem că am *compus (înmulţit)* aceste permutări. În algebră se demonstrează că *prin compunerea a două permutări pare se obţine tot o permutare pară, prin compunerea a două permutări impare se obţine o permutare pară, iar prin compunerea unei permutări pare cu o permutare impară se obţine o permutare impară* (paritatea compunerii a două permutări este aceeaşi cu paritatea sumei inversiunilor din aceste două permutări).

Să revenim însă la joc. Următoarea afirmație dă cheia lui (inclusiv a ofertei lui Loyd): mutarea pieselor nu schimbă paritatea configurațiilor; deoarece configurația inițială este pară (conține zero inversiuni), numai configurațiile pare sînt rezolvabile. Configurația din figura 9 conține o singură inversiune, este impară, deci ea nu este realizabilă.

Această observație face complet neatractivă oferta lui Loyd și scade destul de mult însuși interesul față de joc: printr-o simplă numărare a inversiunilor (cu atît mai simplă, cu cît ne aflăm mai spre finalul jocului), putem afla dacă are rost să continuăm sau nu, știind dinainte dacă vom ajunge vreodată la configurația inițială.

Justificarea afirmației anterioare este foarte simplă. Putem deosebi două tipuri de mutări: pe orizontală și pe verticală. O mișcare pe orizontală mută locul pătratului gol fără a schimba ordinea pieselor, deci o asemenea mutare nu schimbă paritatea configurației. Să privim o mișcare pe verticală. Mutînd o piesă în căsuța goală (aflată sub ea sau deasupra ei), se schimbă poziția acelei piese în raport cu cele trei piese care o separă de căsuța goală; ordinea tuturor celorlalte piese, precum și ordinea celor patru piese implicate în mutare față de piesele neimplicate, rămîn neschimbate (vezi, de exemplu, figura 10). O asemenea mutare corespunde unei permutări impare. De exemplu, în figura 10, de la 1, 2, 3, 4 s-a trecut la 2, 3, 4, 1 și avem aici trei inversiuni: pe pozițiile 1—4, 2—4 și 3—4. Tot cîte trei inversiuni introduc și celelalte posibilități de plasare a locului gol:

1, 2, 3, 4 → 4, 1, 2, 3 (locul gol deasupra lui 4, deci înaintea lui 1).

1, 2, 3, 4 → 2, 3, 4, 1 (locul gol sub 1, deci la dreapta lui 4).

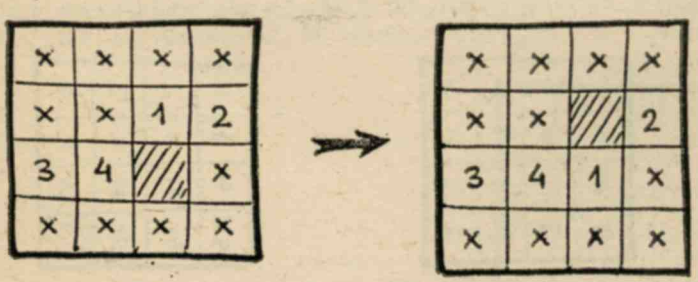

Fig. 10

Trei inversiuni corespund deci atît mutărilor în sus, cît și mutărilor în jos, indiferent de poziția în care se execută.

Să nu uităm însă că am plecat cu căsuța goală în poziția din stînga-jos și că trebuie să ajungem cu ea tot acolo. Rezultă că într-un joc complet se fac la fel de multe mutări verticale în jos, cîte se fac în sus (altfel căsuța goală ajunge în altă parte sau chiar iese din tablă..). Altfel spus, *numărul mutărilor pe verticală este par.* Fiecare dintre ele corespunde unei permutări impare, deci prin compunerea lor se obține o permutare pară (suma unui număr par de numere impare este un număr par).

Pentru o analiză completă a jocului, ar mai trebui arătat că oricare două configurații de paritate similară pot fi transformate una în cealaltă, făcînd să lunece cele 15 piese în cutie. Acest lucru se poate lămuri ușor practic și probabil că cititorul este dornic să-l testeze singur (dacă nu cumva a și făcut-o deja).

Problema inițială a lui Loyd nu are soluție, dar alte probleme asupra jocului 14—15 pot fi rezolvate. Iată trei, formulate de Loyd însuși:

1. Plecînd de la poziția din figura 9 (deci cu piesele 14—15 inversate), să se aducă piesele la poziția din figura 11.

2. Plecînd de la aceeași poziție și rotind cutia cu 90° spre dreapta, se cere să se aducă piesele în ordinea din figura 12.

3. Plecînd din aceeași poziție, să se ajungă la un pătrat magic (cu suma pe linii, coloane și diagonale egală cu 30; desigur, pătratul gol este considerat valorînd zero puncte).

Prima problemă poate fi rezolvată în 44 de mutări, a doua în 39, iar a treia în 50. Iată aceste soluții (fiecare mutare

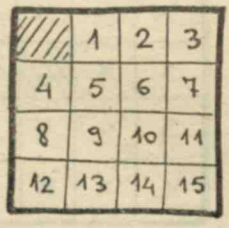

Fig. 11

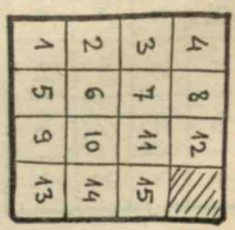

Fig. 12

este indicată prin numărul piesei care se mută în locul gol al tablei):

Problema 1: 14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7, 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14, 10, 6, 2, 1.

Problema 2: 14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Problema 3: 12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3 (configurația finală este dată în figura 13).

În problema 1, pătratul gol a ajuns în colțul din stînga-sus. Pentru aceasta sînt necesare trei mutări pe verticală în sus și trei pe orizontală spre stînga fără perechi în jos, respectiv, spre dreapta. Cele trei mutări în sus introduc un număr impar de inversiuni, deci schimbă paritatea permutării. Ceea ce s-a și întîmplat: am plecat de la o permutare impară (fig. 9) și am ajuns la una pară (fig. 11).

Pe de altă parte, dacă am considera că și pătratul gol are o valoare numerică, 16, de exemplu, atunci atît permutarea din figura 9, cît și cea din figura 11 sînt impare: una, respectiv, cincisprezece inversiuni. Observația nu contrazice însă discuția anterioară, deoarece în acest caz și mutările orizontale introduc sau elimină inversiuni și anume, exact cîte una de mutare. Trei mutări orizontale fără pereche corespund deci unui număr impar; împreună cu numărul impar de inversiuni introdus de mutările verticale nepereche, obținem un total par, deci paritatea permutării nu se schimbă.

Considerații similare au loc pentru problema 2.

La bine cunoscuta sa rubrică, „Mathematical games", din „Scientific American", M. Gardner a propus și o variantă

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

Fig. 13

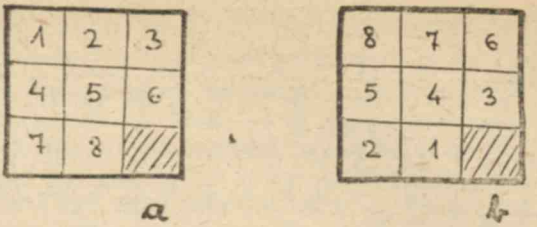

Fig. 14

redusă a jocului, anume 3×3 (fig. 14). Este ușor de văzut că și la acest joc tot numai configurațiile pare pot fi obținute plecînd de la poziția din figura 14 a. Configurația din figura 14 b este pară și ea poate fi transformată în configurația inițială folosind următorul șir de mutări: 1, 2, 5, 4, 3, 1, 2, 3, 7, 6, 1, 2, 3, 7, 6, 1, 2, 3, 7, 5, 4, 8, 1, 2, 3, 6, 5, 7, 6, 5, 8, 4, 7, 8, 5, 6. În total, 36 de mutări. O vreme, aceasta a fost cea mai bună soluție a problemei, apoi, cu ajutorul calculatorului au fost obținute 634 de metode care cer mai puțin de 36 de mutări: 10 soluții cu 30 de mutări, 112 cu 32 de mutări și 512 soluții cu cîte 34 de mutări. Iată cîteva dintre cele zece soluții optime:

3, 4, 7, 8, 5, 2, 1, 7, 4, 3, 7, 4, 8, 6, 3, 8, 6, 5, 2, 1, 4, 7, 8, 6, 5, 2, 1, 4, 7, 8

1, 2, 5, 8, 7, 4, 3, 1, 2, 5, 8, 7, 4, 3, 1, 6, 3, 1, 5, 2, 6, 5, 2, 8, 7, 4, 1, 2, 5, 6

3, 4, 7, 8, 5, 2, 1, 7, 8, 5, 2, 1, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 8, 5, 6, 4, 3, 6, 4, 2, 1, 4, 5, 8

1, 4, 5, 8, 7, 5, 3, 6, 5, 3, 4, 1, 6, 5, 3, 4, 1, 2, 8, 7, 4, 1, 2, 8, 7, 4, 1, 2, 5, 6.

Numărul jocurilor logice de două persoane este imens și nici o carte nu poate aspira la titlul de enciclopedie a jocurilor. În 1982 a apărut la „Academic Press" o carte monumentală, în două volume de format mare, însumînd aproape nouă sute de pagini: E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R.K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, care conține foarte multe jocuri (abordate matematic), dar în prefața căreia autorii își iau precauția de a recunoaște că (nici măcar) lucrarea lor nu prezintă toate jocurile (logice) cît de cît răspîndite. Ea conține însă multe jocuri pe care sînt sigur că cititorul nu le cunoaște încă, de aceea, în paragraful următor, voi consemna cîteva dintre ele, mai ales dintre cele care au și o noimă matematică sau cheamă în mod firesc matematica în vederea clarificării unor chestiuni legate de ele.

4.1. Cu creionul pe hîrtie

Primul joc este, de fapt, de tip „cu guma pe hîrtie", deoarece se desfășoară astfel. Unul dintre cei doi jucători desenează o figură oarecare, formată din segmente, reprezentînd sau nu un obiect real și avînd undeva un *suport* (vezi fig. 15 și 16). Apoi, jucătorii șterg pe rînd cîte un segment al figurii, pe oricare doresc. Atunci cînd, după o asemenea ștergere, o parte a figurii rămîne „fără legătură cu pămîntul" (fără legătură cu suportul din desenul respectiv), atunci acea parte este eliminată (fără a consuma pentru aceasta o mutare a vreunui jucător). De exemplu, dacă în figura 15, un jucător șterge segmentul de la bază al unuia dintre cele două „fire de iarbă", atunci întregul fir este scos din joc în acel moment.

Cîștigător este jucătorul care șterge ultimul un segment al figurii (aducîndu-l pe adversar în situația de a nu mai putea

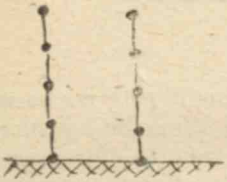

Fig. 15

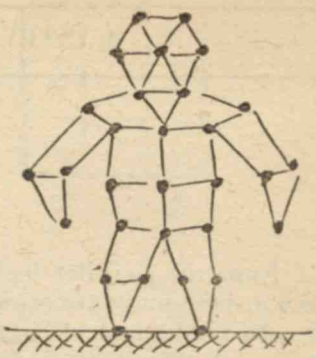

Fig. 16

șterge nimic). De pildă, în figura 15, jucătorul care „mută" primul pierde, indiferent cum joacă, deoarece al doilea jucător nu are altceva de făcut decît să procedeze simetric, ștergînd segmentul corespunzător segmentului șters de adversar, dar din celălalt „fir". În felul acesta, el va avea de fiecare dată ceva de șters, deoarece primul jucător a avut la rîndul lui ce șterge. Este însă mult mai greu de văzut cine iese cîștigător într-o partidă desfășurată pe o figură mai complicată (pe fig. 16, de exemplu).

O variantă interesantă a jocului poate fi cea în care segmentele figurii sînt colorate, să zicem, în roșu, albastru și verde, și unul dintre jucători șterge segmente roșii, celălalt albastre, iar segmentele verzi pot fi șterse de oricare (repartizarea culorilor roșu—albastru se poate face prin tragere la sorți). Întrecerea pe o asemenea figură poate fi deosebit de dificilă, mai ales dacă figura este complicată. Încercați, de pildă, să vă întreceți cu un prieten în „peisajul" din figura 17 (în care colorați, eventual, unele segmente în roșu/albastru).

Faptul că pentru figura 15 am putut spune imediat cine va cîștiga nu este întîmplător. De fapt, pentru orice figură formată din elemente filiforme, oricît de multe ar fi ele, se poate vedea încă de la început cine cîștigă. Motivul este că în acest caz jocul nu este altceva decît o formă deghizată a *Nim*-ului, un joc cu teorie matematică pusă la punct încă de la începutul secolului (1901 — Charles Leonard Bouton, Harward). Cititorul interesat poate găsi detalii în cartea

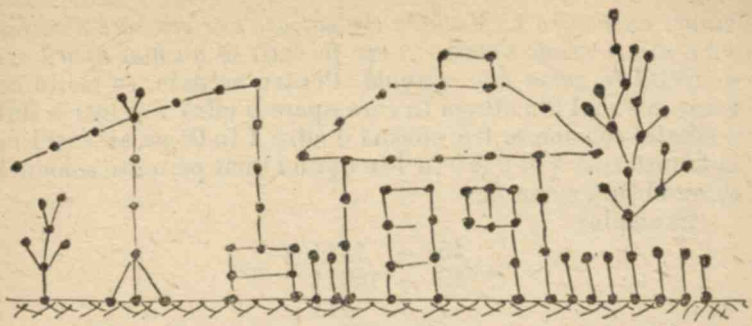

Fig. 17

Amuzamente matematice, de Martin Gardner (Edit. Științifică, 1968), de aceea nu insist asupra acestui joc. Amintesc doar faptul că găsirea învingătorului și a strategiei cîștigătoare se face pe o cale foarte... aritmetică: se numără segmentele din fiecare fir al figurii, se scriu aceste numere în baza doi și se face adunarea acestora, coloană cu coloană, în baza doi, *fără a trece puteri ale lui 2 de la dreapta spre stînga*. Iată un exemplu de asemenea calcul: în figura 15 avem cîte 4 segmente în fiecare fir, deci

$$4 = 1\,0\,0 \quad \text{(în baza doi)}$$

și

$$\begin{array}{l} 100 + \\ 100 \\ \hline 000 \end{array}$$

Dacă am fi avut trei fire, cu cîte 3, 4, 5 segmente, atunci calculul ar fi arătat astfel:

$$\begin{array}{ll} 3 \rightarrow & 11 + \\ 4 \rightarrow & 100 \\ 5 \rightarrow & 101 \\ \hline & 010 \end{array}$$

În primul caz, primul jucător pierde, oricum ar juca; în cel de-al doilea el cîștigă dacă „taie" două segmente din primul fir. Verificați această afirmație.

În general, se poate demonstra că *primul jucător cîștigă dacă și numai dacă în modul anterior de adunare a numerelor*

binare apar cifre 1. Mutarea cîştigătoare este cea care modifică unul dintre aceste numere în aşa fel încît să nu mai apară nici o cifră 1 în suma nou obţinută. Pentru aceasta, se caută coloana cea mai din stînga în care apare o cifră 1 şi într-o linie a acestei coloane se transformă o cifră 1 în 0; pe aceeaşi linie se transformă 1 în 0 şi 0 în 1 în aşa fel încît pe toate coloanele să se obţină suma 0.

Exemplu:

$$\begin{array}{rl} 15 \rightarrow & 1111 + \\ 19 \rightarrow & 10011 \\ 7 \rightarrow & 111 \\ \hline & 11011 \end{array}$$

Vom modifica linia a doua, înlocuind toate cifrele 1 cu 0 şi primul 0 cu 1. Obţinem

$$\begin{array}{rl} 15 \rightarrow & 1111 + \\ 8 \rightarrow & 1000 \\ 7 \rightarrow & 111 \\ \hline & 0000 \end{array}$$

Cu alte cuvinte, în joc, scoatem 11 segmente din cel de-al doilea fir de iarbă şi victoria nu ne poate scăpa. Dacă de la început aveam trei fire cu cîte 15, 8, 7 segmente, atunci pierdeam partida oricum am fi jucat (presupunînd că adversarul joacă perfect, desigur).

Să trecem însă şi la alte jocuri, fără strategii cîştigătoare simple.

Mai multe jocuri înrudite pot fi practicate avînd la dispoziţie o foaie de hîrtie şi un creion (eventual, două creioane, de culori diferite) şi bazîndu-ne pe mutarea elementară: se trasează o curbă (prin unul sau mai multe puncte speciale ale desenului) fără a intersecta o curbă anterioară. Voi prezenta aici trei jocuri de acest fel. Regula de desemnare a cîştigătorului va fi aceeaşi la toate trei: ultimul jucător care poate „muta" cîştigă, cel care nu mai poate continua jocul pierde.

J1. Se desenează mai multe puncte pe o foaie de hîrtie şi apoi jucătorii trasează pe rînd cîte o curbă închisă care trece prin cel puţin un punct (fig. 18).

Variantă mai interesantă: curbele trebuie să treacă printr-un singur punct şi să închidă înăuntrul lor cel puţin un punct liber (peste care nu trece încă o curbă).

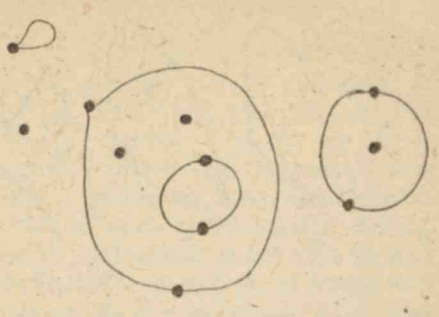

Fig. 18

J2. Plecînd tot de la un set de puncte desenate la întîmplare pe o foaie albă, se procedează astfel: se unesc două puncte oarecare cu o linie (în particular, cele două puncte pot să coincidă, adică putem trasa o curbă închisă care trece printr-un punct dat). După trasarea unei linii, se introduce un nou punct, chiar pe acea linie. Dintr-un punct nu pot pleca decît cel mult trei „capete" de linii.

Jocul (imaginat de J.H. Conway și M.S. Paterson) se complică rapid o dată cu creșterea numărului de puncte inițiale. Chiar și plecînd de la numai două puncte, se pot face 4—5 mutări (fig. 19); de fapt, se poate demonstra că plecînd de la n puncte, jocul se termină după cel puțin $2n$ și cel mult $3n - 1$ mutări.

Analiza acestui joc este bine pusă la punct. În *Winning ways...*, lucrarea amintită mai înainte, se precizează și următoarea teoremă asupra sa: dacă o partidă durează exact $2n$ mutări, atunci configurația finală la care se ajunge este compusă în mod precis din „insectele" arătate în figura 20 (una dintre ele, „infestată" cu un număr arbitrar de buburuze); bineînțeles, „insectele" vor apărea deformate, dar echivalente cu cele din figură.

J3. O variantă a celui de-al doilea joc este următoarea. Se desenează cîteva semne + (plus) pe hîrtie (sau pe asfalt...), apoi, pe rînd, jucătorii unesc două „ramuri", de la același semn sau de la două semne plus diferite, cu o linie. Această linie poate avea orice formă, dar nu are voie să intersecteze alte linii sau alte plusuri. Pe această linie, jucătorul care a trasat-o va adăuga un nou plus, tăind-o cu o liniuță. Este acum rîndul adversarului să unească două plusuri cu o linie pe care să adauge o liniuță și așa mai departe. Jocul continuă

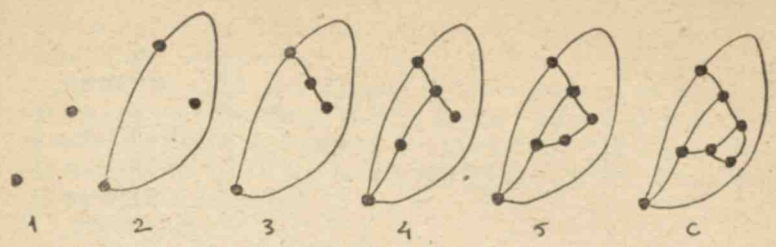

Fig. 19

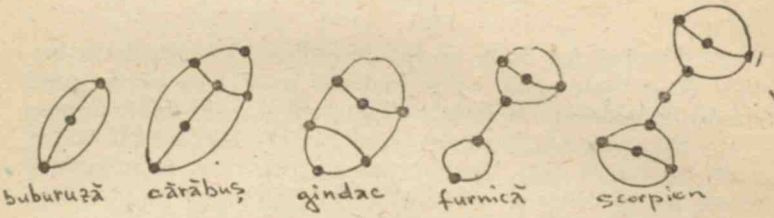

Fig. 20

pînă ce nu mai pot fi trasate noi linii. Jucătorul care este atunci la mutare pierde.

În figura 21 este prezentată, pas cu pas, o partidă de acest gen, cîștigată de jucătorul al doilea: după mutarea a opta, primul jucător nu mai are cum să continue, toate capetele de linii sînt „izolate" (încercuite sau — unul singur — în exteriorul figurii).

Iată încă un joc de tip „cu creionul pe hîrtie", prezentat de Sam Loyd într-o problemă a sa ca fiind „un joc oriental,

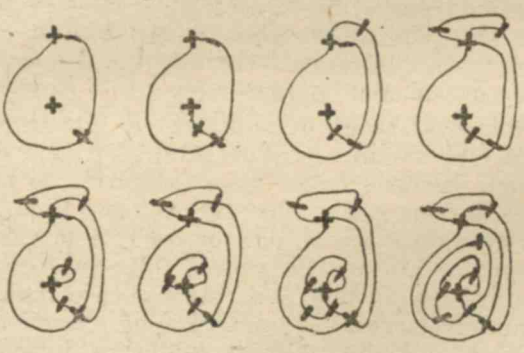

Fig. 21

foarte vechi". El se desfășoară astfel. Se desenează mai întîi mai multe șiruri de puncte, aliniate atît pe verticală cît și pe orizontală (a se vedea fig. 22). Apoi, pe rînd, cei doi jucători (să-i numim Andrei și Barbu, *A* și *B*, pe scurt) unesc cîte două puncte vecine printr-o linie orizontală sau verticală. Atunci cînd printr-o asemenea linie, unul dintre jucători a închis un pătrat (delimitat de patru puncte vecine), el își înscrie inițiala numelui în acel pătrat și are voie să mai tragă o linie. Dacă și acum închide un pătrat, el iarăși mai trage o linie. Și așa mai departe, de cîte ori poate, după care este rîndul adversarului. Jocul continuă pînă ce toate pătratele au fost închise. Cîștigător este jucătorul care a închis mai multe pătrate. În figura 22 este indicată o partidă por-

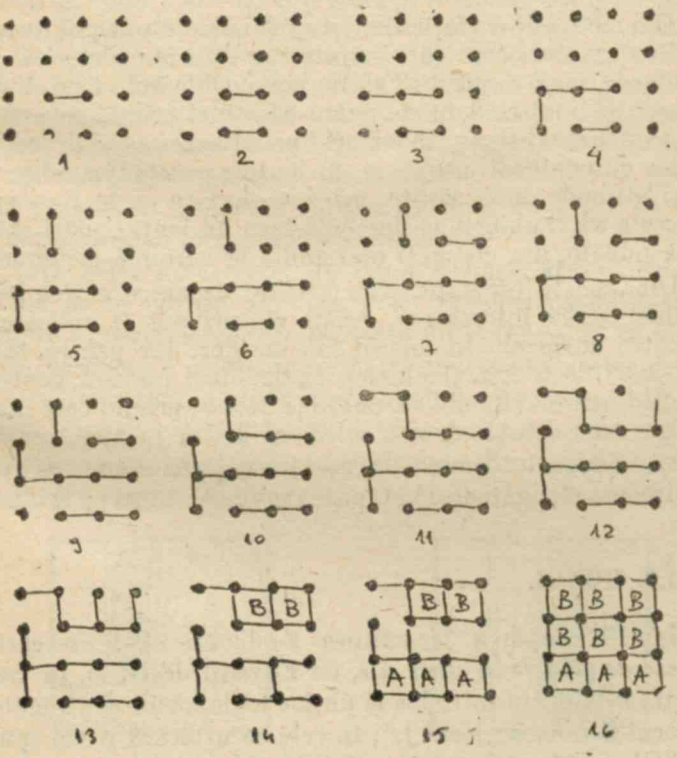

Fig. 22

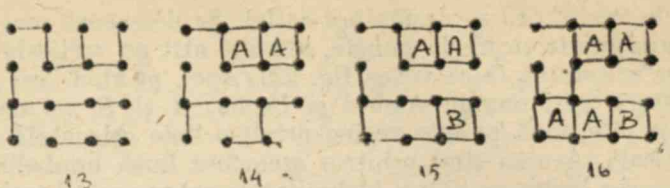

Fig. 23

nind de la 16 puncte inițiale. Ea se termină cu scorul 6—3 în favoarea lui *B*. Desigur, jocul poate folosi „table" de mărimi diferite; partida anterioară pornea de la 4 șiruri de cîte 4 puncte. La fel de bine se poate pleca de la 5 × 5 sau 6 × 6 sau de la oricît de multe puncte. Jocul este cu atît mai atractiv cu cît tabla este mai mare.

Din modul de desfășurare a partidei dinainte se pot deduce și cîteva sfaturi care să vă ajute în obținerea victoriei. Într-adevăr, cum a reușit *B* să învingă? Obligîndu-l pe *A* să-i „ofere" în final un lanț de patru căsuțe. Deci: 1) construiți lanțuri cît mai lungi și 2) forțați-l pe adversar să vi le cedeze, 3) dar nu capturați neapărat tot lanțul; puteți lăsa adversarului ultimele două căsuțe, printr-o mutare ca în figura 23 și acesta va fi obligat să deschidă încă un lanț. Cedați astfel două puncte, dar cîștigați mai multe la mutarea următoare.

Din păcate (de fapt, din fericire, deoarece astfel jocul rămîne mereu interesant), aceste sfaturi pot fi aplicate și de către adversar. În folosul lui, desigur. Iar pentru table mai mari de 5 × 5 (inclusiv), cîștigătorul nu mai poate fi prezis dinainte. (De obicei, pe table 3 × 3, primul care mută cîștigă, iar pe table 4 × 4 cel de-al doilea jucător, mutînd corect, cîștigă totdeauna. Încercați să găsiți asemenea strategii mereu cîștigătoare. Veți putea învinge atunci pe oricine!)

4.2. BONOL

În 1969 apărea la editura londoneză Pelican cartea *Cursul de gîndire în cinci zile*, de Edward de Bono, în care, printre altele, era introdus și un joc logic inedit și atrăgător. Autorul îl numea „jocul L"; în cele ce urmează îi voi spune BONOL, pentru a-l aminti astfel și pe inventator.

Jocul se practică pe o tablă pătrată, caroiată 4 × 4. Fiecare dintre cei doi jucători are cîte o „literă " L (de culori diferite, una neagră și una albă, de exemplu) formată din patru pătrățele. Există, de asemenea, două piese pătrate, neutre (de culoare gri). Inițial, cele patru piese sînt așezate ca în figura 24. Apoi, jucătorii mută pe rînd, o mutare constînd în ridicarea L-ului propriu de pe tablă și plasarea lui *în altă poziție*, într-un loc liber, desigur (este permisă și întoarcerea cu cealaltă față în sus), urmată eventual (opțional deci) și de mutarea unui pătrat gri. Cîștigător este jucătorul care îl aduce pe adversar în situația de a nu mai putea muta.

În *Winning ways...*, cartea citată în secțiunea anterioară, sînt date o serie de amănunte asupra BONOL-ului. Astfel, există în total 2 296 de configurații distincte ale celor patru piese. Dintre acestea, considerînd că negrul este la mutare, 15 sînt poziții în care partida este deja încheiată în favoarea albului; din alte 14 poziții, albul bate sigur (dacă joacă perfect, bineînțeles) în 2, 4, 6 sau cel mult 8 mutări. În schimb, jucînd corect și fiind la mutare, negrul poate învinge în 1 006 poziții. (Evident, aceleași afirmații sînt valabile și pentru alb, cu poziția „colorată" invers.) Restul de 1 261 de configurații conduc la remiză prin ciclare.

Iată calea spre cîștig (în două mutări) atunci cînd se pleacă de la poziția din figura 25. Singura posibilitate de mutare a piesei negre este în colțul din stînga-sus. Să observăm (verificați!) că oricum ar muta negrul una dintre piesele neutre (eventual, lăsîndu-le pe amîndouă pe loc), el nu-l poate împiedica pe alb să mute piesa sa (plus, dacă e cazul, o piesă neutră) pentru a ajunge în una din pozițiile cîștigătoare din figura 26.

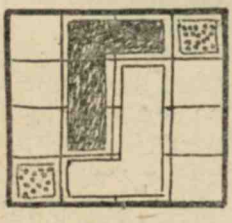

Fig. 24

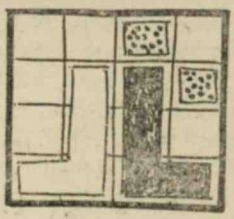

Fig. 25

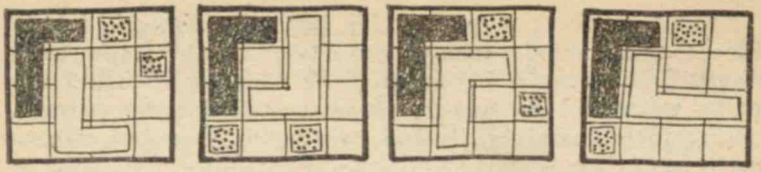

Fig. 26

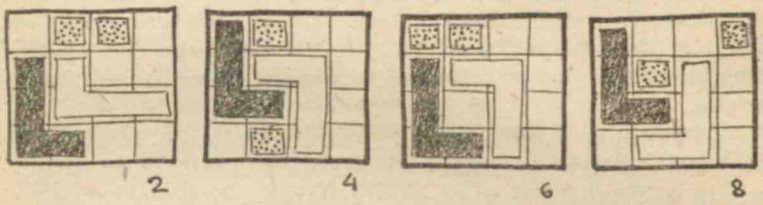

Fig. 27

În pozițiile din figura 27, dacă negrul este la mutare, atunci albul bate în 2, 4, 6, respectiv, 8 mutări. Las cititorului plăcerea de a găsi mutările corecte în fiecare dintre aceste situații.

Am menționat mai devreme că există 1 261 de poziții din care, dacă cei doi jucători mută corect, jocul ciclează, terminîndu-se deci remiză. („Mută corect" înseamnă „mută pentru a obține cel mai bun rezultat posibil în situația respectivă". În cazul nostru, abaterea de la „corectitudine" înseamnă pierderea partidei.) Mai mult de jumătate deci din numărul total al pozițiilor conduc la egalitate. Configurația inițială de ce tip este? Nu cumva...? Exact! Plecînd din poziția din figura 24, ambii jucători au remiza asigurată, ceea ce micșorează interesul față de joc. Mai rămîne însă să fie și găsită strategia de remiză.

Deși am fost tentat să nu consemnez aici această strategie (găsită de către N.E. Goller), iat-o totuși. În general, și figurile 26, 27 par deja a sugera acest lucru, așezarea L-ului propriu peste centrul tablei este un avantaj, de cele mai multe ori existînd posibilitatea unei mutări suplimentare, indiferent cum mută adversarul. De exemplu, dacă piesa noastră ocupă deja trei din cele patru pătrate din centru (precum piesa albă în ultimele trei poziții din figura 26), atunci, oricum ar muta aversarul, putem muta din nou, ocupînd cel puțin două

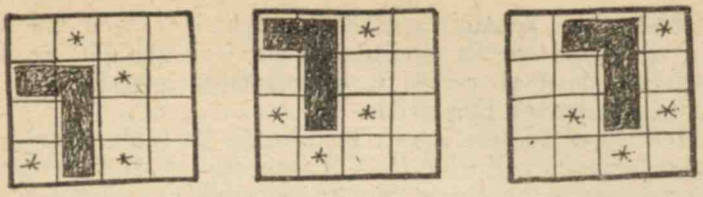

Fig. 28

din pătratele centrale. În plus, și afirmația poate fi verificată prin încercări, dacă piesa noastră ocupă două din pătratele centrale (fig. 28, plus rotațiile și oglindirile ei), iar cele două piese neutre nu ocupă pătratele însemnate cu o steluță în figura 28, atunci, din nou putem muta încă o dată și anume, putînd reveni într-o asemenea configurație convenabilă.

Inițial (fig. 24) ne găsim într-o situație ca acelea din figura 28, pentru fiecare jucător, deci fiecare poate obține *cel puțin* remiza. *Cel puțin* înseamnă, de fapt, *cel mult*, o partidă de BONOL (și de oricare alt joc competitiv) fiind ceva care nu poate fi cîștigat de ambii jucători...

4.3. Moara cu noroc

Titlul anterior este împrumutat din cartea lui N. Oprișiu, *Mai în glumă, mai în serios...* (Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1981), al cărei capitol șase se numește chiar așa și este un veritabil „tratat" de *moară*. Presupun că cititorul cunoaște jocul, de aceea nu-i mai precizez aici regulamentul. Ceea ce voi face în continuare este să discut o variantă extrem de interesantă a lui, inventată de curînd de Adam Tichy-Rácz, din Ungaria, și prezentată în și mai interesanta revistă „RUBIK'S. Logic and fantasy dimensions", nr. 1, 1983, p. 20—23 (redactorul-șef al revistei este — ați ghicit! — chiar Ernö Rubik cel atins de geniu). Varianta — s-o numim *ungară* — a morii face de două ori potrivită sintagma din titlu: pe de o parte, este un noroc pentru venerabila moară însăși apariția unor noi variante (forme mai simple ale jocului erau practicate încă din antichitate), pe de altă parte, în noua variantă există și o implicare a hazardului, nu în desfășurarea însăși a partidei, ci *în alegerea tablei cu care se joacă*. Pentru

că acesta este „pontul": modificarea tablei de la o partidă la alta, făcînd inutile eventualele strategii cîştigătoare ale morii standard şi cerînd în permanenţă inventivitate şi studiu din partea jucătorilor.

Iată în ce constau aceste modificări. Pe tabla obişnuită, punctele vecine colţurilor (1, 2, 3, respectiv, *A*, *B*, *C* în figura 29) sînt legate concentric. Sînt însă posibile alte cinci moduri încrucişate de a realiza aceste legături (fig. 30 a—e). O tablă de joc are (deocamdată...) patru colţuri. Ideea lui A. Tichy-Rácz este simplă şi ingenioasă precum cea a lui Columb în anecdota cu oul care-i poartă numele: să jucăm moară pe table obţinute combinînd aleator patru tipuri de colţuri, nu neapărat diferite, dintre cele şase precizate în figurile menţionate. Una dintre aceste configuraţii conduce la tabla clasică (de patru ori colţul din fig. 29). Toate celelalte leagă însă punctele în mod deosebit şi jocul se complică serios. De pildă, în figura 30 a, pentru a ajunge de la punctul 2 la punctul *B* trebuie să facem trei mutări; mai mult, în unele situaţii putem trece cu piesele proprii printre piesele adversarului (regulamentul rămîne acelaşi: se mută dintr-un punct într-un punct vecin, se formează mori, se capturează piese etc., cu precizarea că nu toate intersecţiile sînt „marcate", ci numai cîte trei pe fiecare linie — vezi tabla completă din figura 31).

Alegerea celor patru colţuri se poate face aruncînd, de exemplu, patru zaruri, sau în oricare alt mod potrivit (sînt deci necesare colţuri „prefabricate").

În articolul citat, A. Tichy-Rácz evaluează la 1 296 numărul tablelor diferite pentru moara ungară (deci la fel de multe strategii ar fi necesare pentru a banaliza jocul). Într-adevăr, fiecare colţ poate fi de unul dintre cele şase tipuri disponibile, două colţuri pot fi aranjate în 36 de moduri, trei colţuri în

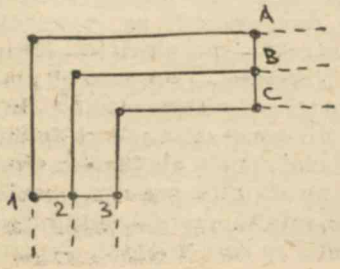

Fig. 29

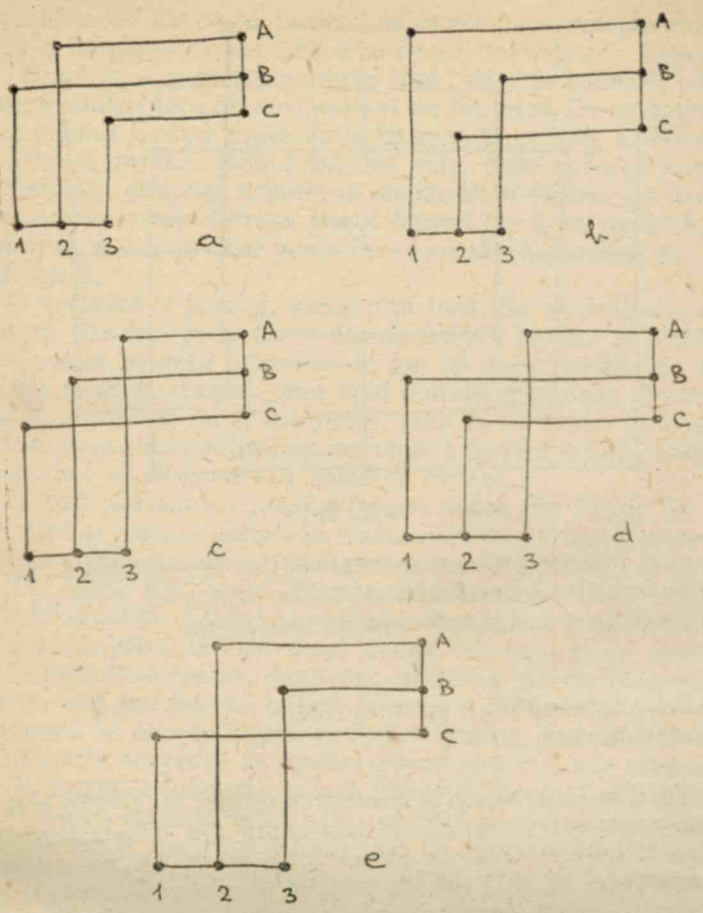

Fig. 30

216, iar patru colțuri în 1 296 de variante. *Incluzînd însă rotațiile și tablele oglindite* (care nu necesită totuși strategii noi, ci „rotiri" și „oglindiri" ale unor strategii valabile pe tablele înrudite). Există patru posibilități de a roti o tablă dată, deci există numai $1\,296/4 = 324$ de table diferite din acest punct de vedere. Pentru fiecare dintre acestea există însă o tablă strategic echivalentă și anume, cea oglindită (privită „de pe partea cealaltă"). *Numai 162 de table sînt deci*

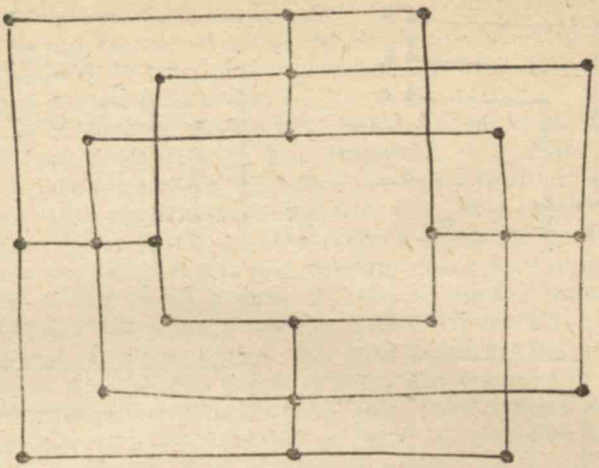

Fig. 31

esențial *diferite*. Numărul, mai puțin impresionant decît 1 296, este totuși suficient de mare pentru ca jocul să fie suficient de atractiv, suficient de mult timp.

4.4. Trei-în-rînd, patru-în-rînd, cinci-în-rînd, ...

„Trei-în-rînd" ne duce imediat cu gîndul la „ticktacktoe", jocul practicat pe asfalt de toți copiii din clasele primare (care îl numesc însă de obicei „plus și zero"). Pe o tablă 3×3 (vezi fig. 32) fiecare jucător plasează (desenează) pe rînd cîte o piesă (semn) proprie. (Evident, fiecare jucător are o rezervă suficientă de piese.) Jocul se termină fie prin realizarea unei linii (orizontal, vertical sau diagonal) de trei

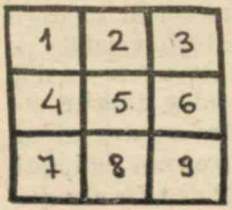

Fig. 32

piese (semne) ale unui jucător (și acela este cîștigătorul), fie prin umplerea tablei fără a se decide învingătorul (remiză). După cum se poate constata ușor, jocul se termină totdeauna remiză dacă cei doi jucători nu fac erori. De exemplu, dacă primul jucător mută de la început în centru, al doilea își asigură remiza jucînd într-un colț, dacă primul joacă într-un colț, al doilea trebuie să răspundă în centru, iar dacă prima mutare este într-un punct lateral (în 3, de exemplu), atunci al doilea jucător poate face remiză răspunzînd în 7, 9, 2 sau 5.

O variantă a jocului, cunoscută încă din antichitate, se juca cu cîte *trei piese* (monede) de fiecare jucător și aceste piese, după ce erau introduse în joc (și dacă partida nu se încheia în acest stadiu), erau apoi mutate ortogonal, precum tura la șah (deci nu și diagonal), pînă la formarea unui șir de trei piese ale unui jucător sau pînă la revenirea la o poziție anterioară, cînd jocul era declarat remiză.

O altă variantă a jocului folosea tabla din figura 33 și permitea și mutări oblice. În ambele aceste variante, primul jucător cîștigă totdeauna dacă plasează prima piesă în centru. Pentru tabla din figura 32, acest lucru se justifică astfel. Să presupunem, pentru simplitate, că primul jucător folosește piese albe, iar cel de-al doilea folosește piese negre. Distingem două cazuri, după cum al doilea jucător răspunde într-un colț sau într-un pătrat de mijloc. Să presupunem că răspunsul lui este în 1 (pentru 3, 7, 9 poziția este simetrică). Următoarea secvență de mutări garantează victoria albului: alb 8, negru 2 (obligat), alb 3 (obligat), negru 7 (obligat), alb 6, negru oriunde, alb 9 și s-a obținut un șir de trei piese. Dacă la alb 5, negrul răspunde în 2 (și simetric pentru 4, 6, 8), atunci albul poate continua astfel: alb 9, negru 1 (obligat), alb 3 (obligat), negru 6 (altfel albul cîștigă într-o mutare), alb 8, negru orice, alb 7 și se realizează un șir pe diagonală.

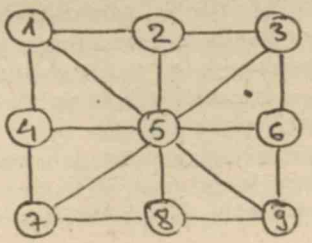

Fig. 33

În varianta aceasta, jocul nu pare deci prea interesant. Ce se întîmplă însă dacă se impune restricția ca primul jucător să nu joace de la început în centru? Evident, jocul pare a se echilibra și cititorul ar trebui să experimenteze această variantă înainte de a afla că *albul poate încă să-și asigure remiza* și în acest caz.

Iată strategia care conduce la acest rezultat: albul începe punînd o piesă în căsuța 1. Negrul poate juca în 2, 3, 5, 6 și 9 (pozițiile 4, 7 și 8 sînt simetrice cu 2, 3 și, respectiv, 6).

a) Dacă negrul răspunde în 2, atunci albul joacă în 5, negrul este obligat să joace în 9, albul joacă în 7 și negrul este obligat să joace în 4. La mutarea alb 7—8, negrul nu poate muta decît 4—7. Dacă albul joacă acum 5—6 și negrul răspunde cu 2—3 sau cu 2—4, atunci negrul pierde, deci el trebuie să joace neapărat 7—4. La alb 6—5, negrul trebuie să revină cu 4—7 și astfel poziția va fi repetată la infinit, prin urmare, jocul se termină nedecis.

b) După alb 1, negru 3, alb 7, negru 4 (obligat), alb 5, negrul pierde dacă joacă 2 sau 6 și intră într-o poziție care va cicla dacă joacă 8 (se ajunge la poziția de la punctul a). Rămîne ca negrul să joace 9. La mutarea alb 1—2, el trebuie să răspundă cu 9—8, apoi la alb 5—6 (obligat), dacă negrul joacă 8—9 se intră din nou într-o poziție de remiză. La negru 8—5, albul răspunde obligat 2—1. Negru 5—8 repetă poziția, negru 5—2 intră în remiză după alb 6—5, negru 3—6, alb 7—8, negru 6—9, alb 5—6 și, de asemenea, mutarea negru 3—2 după alb 7—8, negru 2—3, alb 8—7.

c) Secvența alb 1, negru 5, alb 3, negru 2 (obligat), alb 8 (obligat) poate fi continuată cu negru 9 sau 6 și ambele variante duc la remiză după alb 3—6, negru 5—4 și, respectiv, după alb 1—4, negru 2—1, alb 8—9.

d) Alb 1, negru 6, alb 5, negru 9 (obligat), alb 3, negru 2 determină victoria albului după mutarea piesei din 1 în 4 și apoi în 7.

e) Alb 1, negru 9 trebuie urmate cu alb 3, negru 2 (obligat), alb 5 și se ajunge într-o poziție similară cu cea de la punctul b (o poziție obținută prin rotirea aceleia).

În concluzie, în patru dintre variante albul obține remiza și în una cîștigă.

Există variante ale jocurilor anterioare pe table mai mari, 4 × 4 sau 5 × 5, scopul fiind tot alinierea pieselor (cîte 4, respectiv, cîte 5 de fiecare jucător); aceste jocuri par însă a

se termina nedecis (deşi nu cunosc demonstraţii ale acestei afirmaţii).

O generalizare firească şi interesantă este însă renunţarea la o tablă limitată şi la un număr fixat de piese şi introducerea de piese în joc pînă ce se realizează trei-în-rînd, patru-în-rînd, cinci... etc. Evident, primul jucător cîştigă în numai patru mutări dacă scopul este realizarea unui şir de trei piese. Şi jocul patru-în-rînd se termină totdeauna cu victoria primului jucător (dacă el joacă perfect). Iată o asemenea strategie cîştigătoare. Pentru obţinerea victoriei este suficientă o tablă cu numai cîteva linii şi coloane, de aceea putem presupune că se joacă pe tabla de şah şi putem folosi codificarea uzuală a liniilor şi coloanelor acesteia, referindu-ne la căsuţele tablei conform notaţiei şahiste: **a1**, **a2**,... **e5**,... **h8**.

De la început să remarcăm că dacă un jucător reuşeşte să plaseze trei piese în rînd, cu posibilitatea de a continua în ambele direcţii, atunci el a cîştigat, deoarece adversarul poate bloca un singur capăt la mutarea următoare. De asemenea, dacă un jucător realizează un triunghi, pe trei căsuţe două cîte două vecine, cu posibilitatea de a continua în ambele direcţii două laturi ale triunghiului, atunci, din nou, el cîştigă: adversarul poate bloca o latură la prima mutare, dar pe cealaltă latură se realizează trei piese în rînd şi revenim la situaţia anterioară.

Strategia de urmat este următoarea. Albul începe partida prin a-şi plasa o piesă în centrul tablei, pe **e5**, de exemplu. Distingem mai multe răspunsuri ale negrului:

1. Negrul pune o piesă într-o căsuţă vecină, alăturată. Există patru posibilităţi, toate simetrice; presupunem, de exemplu, că negrul a jucat la **d5**. Albul trebuie să-şi pună următoarea piesă alături de piesa negrului, pe **d4** sau pe **d6**; să presupunem că a jucat **d4**. Negrul este acum obligat să blocheze unul dintre capetele şirului alb: **c3** sau **f6**. În oricare dintre aceste posibilităţi, plasînd o piesă în **e4**, albul realizează un triunghi cu două laturi libere şi astfel cîştigă.

2. Negrul pune o piesă într-o căsuţă vecină pe diagonală. Există din nou patru posibilităţi simetrice de răspuns; presupunem că negrul joacă la **d4**. Albul trebuie să joace în continuare **d6** sau **f4** pentru a realiza un şir de două piese liber la ambele capete. Negrul trebuie să blocheze acum unul dintre capete, altfel albul face un şir de trei piese şi cîştigă. Dacă cele două piese negre nu sînt pe aceeaşi linie sau co-

loană (sînt, de exemplu, în d4 și g3), atunci albul poate realiza un triunghi cu două laturi libere (jucînd, pentru exemplul anterior, în f5) și astfel cîștigă. Dacă cele două piese negre sînt pe aceeași linie sau coloană (de exemplu, în d4 și d6), atunci albul trebuie să plaseze o piesă între ele, realizînd un șir de două piese pe care negrul trebuie acum să-l blocheze la un capăt. Dacă negrul joacă (ne referim din nou la exemplul anterior) în f5, atunci albul realizează un triunghi cu două laturi libere jucînd în e6 și astfel cîștigă. Dacă negrul joacă în e5, atunci albul trebuie să joace în f5 realizînd trei în rînd (cu un singur capăt liber); negrul are acum o mutare obligată — g6, după care albul, jucînd la f3 sau la f6, face trei în rînd cu ambele capete libere și cîștigă.

3. Negrul nu joacă într-o căsuță vecină. În orice situație, albul poate realiza (chiar de la a treia mutare) un triunghi cu două laturi libere la ambele capete (dacă nu cumva realizează chiar un șir de trei piese, liber la ambele capete). Iată cîteva variante:

a) e5, e3, d5, c5 (sau f5), d4 = triunghi,
b) e5, f3, f5, d5 (sau g5), e4 = triunghi,
c) e5, g3, f6, d4 (sau g7), f5 = triunghi,

(se joacă simetric pentru toate mutările negrului aflate la distanță de o căsuță de e5, așa cum sînt e3, f3, g3)

d) e5, e2, d5, c5 (sau f5), d4 = triunghi,

etc. etc.

Într-un număr mic de mutări, albul poate să cîștige în acest fel fiecare partidă. După o inițiere relativ scurtă, jocul devine astfel complet neatractiv.

Strategia anterioară era expusă pe o tablă 8×8, dar, de fapt, chiar o tablă 7×7 este suficientă. Trecerea la table mai mari de 7×7 este deci o generalizare prea puternică. Să revenim la table mai mici. Pe o tablă 5×5, cel de-al doilea jucător are strategie de remiză și aceasta este surprinzător de simplă: să distingem în interiorul tablei 5×5 o tablă centrală de dimensiuni 3×3 și în această tablă să jucăm ca la *tick-tacktoe* (unde avem strategie de remiză). Deci, dacă primul jucător mută pe margine, acolo mutăm și noi și este ușor să-l împiedicăm să facă patru-în-rînd pe margine sau pe diagonalele mici (cele de cîte patru pătrate); dacă el joacă în pătratul central 3×3, atunci jucăm și noi acolo, ca la *tick-tacktoe*.

Nu știu ce se întîmplă pe tabla 6×6, dar s-a demonstrat cu ajutorul unui calculator că pe o tablă...4×30, primul jucător are strategie cîștigătoare.

Să mergem mai departe.

Cinci-în-rînd este cel mai interesant dintre jocurile de tip *n*-în-rînd. El cunoaște de altfel o mare răspîndire în multe țări, iar în Japonia se joacă de către foarte mulți oameni pe tabla de GO (sub numele *Renju* sau *Go-moku*). Pe o tablă 5×5 jocul se termină nedecis, dar se pare că pe o tablă 19×19, cum este cea de GO, primul jucător are un avantaj substanțial (fără a se cunoaște însă o strategie cîștigătoare a acestuia), de aceea, în Japonia, cel puțin, primul jucător are unele restricții suplimentare, menite să echilibreze șansele.

(De remarcat că în — de altfel foarte frumoasa carte — *Olimpiada jocurilor raționale*, de N. Oprișiu, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1984, se afirmă că cel de-al doilea jucător are strategie de remiză, chiar pe table infinite; raționamentul care însoțește această afirmație nu este însă deloc convingător. Din păcate...)

Despre șase- și șapte-în-rînd pe table nelimitate nu se știe precis mai nimic, dar toată lumea este convinsă că, jucată corect, orice partidă continuă la nesfîrșit. Afirmația similară a fost demonstrată însă pentru jocuri de la opt-în-rînd în sus, pentru nouă-în-rînd ea fiind obținută încă din anul 1954 de către H.O. Pollak și C.E. Shannon. Un mod simplu de a justifica acest lucru este de a folosi *metoda perechilor*, a lui A.W. Hales și R.I. Jewett. Iată o ilustrare a acestei metode pentru a arăta că cinci-în-rînd se termină remiză pe o tablă 5×5, dacă cel de-al doilea jucător joacă perfect. Să privim figura 34. Dacă primul jucător mută în centru, noi putem juca oriunde. La fiecare mutare la care el ocupă o altă căsuță decît centrul, noi mutăm în căsuța aflată pe direcția liniei din căsuța în care tocmai a mutat adversarul și marcată cu o linie de aceeași orientare. De exemplu, dacă el joacă în colțul din stînga-sus, noi trebuie să jucăm în colțul din dreapta-jos și invers. Dacă există deja o piesă proprie în căsuța în care tocmai dorim să mutăm, cu atît mai bine, mutăm oriunde în altă parte. Remiza este asigurată. Și ea este asigurată chiar dacă adversarul ocupă de la început centrul și apoi mai face încă o mutare tot el!

Un procedeu similar de împerechere a pătratelor este valabil și în cazul nouă-în-rînd, garantînd remiza pentru cel

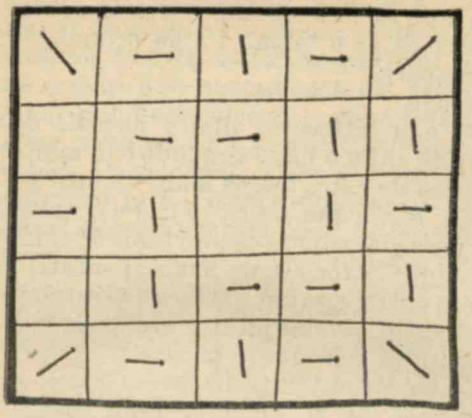

Fig. 34

de-al doilea jucător, chiar pe table infinite. Figura 35 (preluată ca și figura 34 din *Winning ways...*) demonstrează acest lucru: la fiecare mutare a adversarului, noi mutăm în

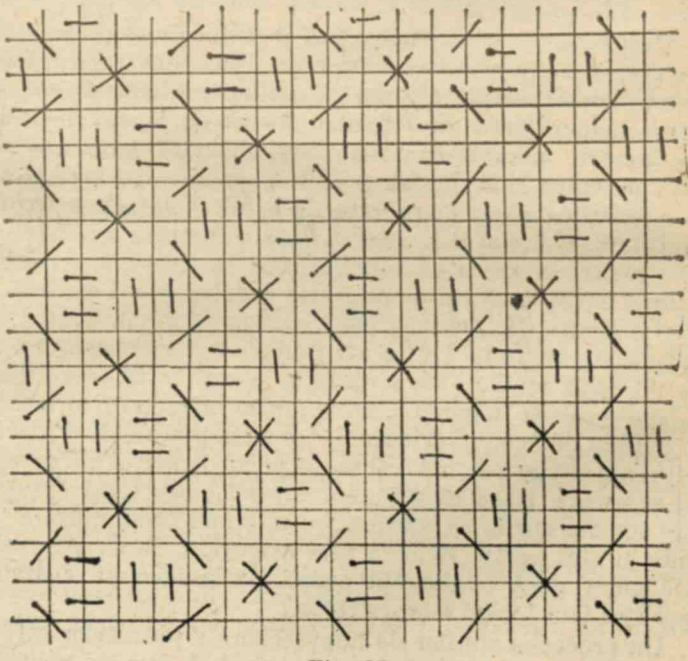

Fig. 35

căsuța vecină aflată în capătul opus al liniuței care unește două cîte două căsuțele tablei. Observați că figura 35 își repetă simetric porțiunile de tablă și că poate fi astfel multiplicată pentru a umple tot planul. De asemenea, ca o încheiere a demonstrației, observați că oricare nouă căsuțe vecine, orizontal, vertical sau diagonal, nu pot fi ocupate cu piese de o singură culoare, deci jocul nu poate fi cîștigat niciodată.

Cum spuneam, există o împerechere similară a pătratelor și pentru a demonstra că opt-în-rînd se termină remiză dacă al doilea jucător cunoaște această împerechere. Se speră, de asemenea, că și pentru șapte-în-rînd este valabil un procedeu similar, dar el nu a fost încă descoperit.

4.5. CUGO

Jocul pe care vi-l prezint în continuare face o vagă trimitere la jocul GO, de care ne vom ocupa în Capitolul 7, de aceea l-am numit CUGO (CUasi GO).

Jocul se poate practica pe o tablă obișnuită de șah, folosind cele două seturi de pioni sau orice alte două seturi de cîte opt piese colorate diferit.

Jocul are două faze. În prima, fiecare jucător plasează pe rînd cîte o piesă pe tablă (în căsuțele acesteia), iar în a doua fază, jucătorii mută pe rînd cîte o piesă dintr-o căsuță într-o căsuță alăturată. O piesă aflată în centrul tablei goale poate fi deci mutată în patru direcții, două pe linia și două pe coloana pe care ea se găsește.

Obiectivul fiecărui jucător este încercuirea uneia sau mai multor piese ale adversarului, obiectiv ce poate fi realizat atît în prima fază, cît și în a doua. Jocul se termină atunci cînd un jucător reușește acest lucru.

Un grup de piese ale unui jucător se consideră încercuite atunci cînd nici o piesă din grup nu poate fi mutată în nici o direcție din cauza pieselor adversarului și eventual a marginii tablei. Subliniez că nici o piesă din grup nu poate fi mutată. De pildă, piesele negre din figura 36 sînt încercuite, dar cele din figura 37 nu, chiar dacă două din ele nu pot fi mutate.

În prima fază a jocului se poate întîmpla ca prin plasarea unei piese să apară atît piese albe blocate cît și piese negre

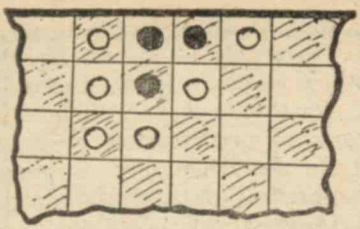

Fig. 36

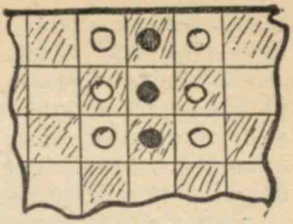

Fig. 37

(dacă în figura 38 se plasează o piesă albă în colțul tablei, atunci ea va fi o piesă blocată, dar în același timp va bloca cele două piese negre alăturate). Într-o asemenea situație, câștigător este jucătorul care a blocat mai multe dintre piesele adversarului. Dacă s-au blocat un număr egal de piese, atunci jocul este declarat remiză.

Evident, în faza a doua nu pot apare situații de blocare reciprocă (mutarea câștigătorului poate fi efectuată și înapoi).

Interesante par a fi și problemele de CUGO. Priviți, de exemplu, figura 39. Unde trebuie să-și plaseze negrul ultima piesă pentru a câștiga?

Soluția problemei este **e1**. Într-adevăr, mutînd **d3—d2**, **g2—g1**, **g3—g2**, negrul poate încercui piesele albe de la **e2**,

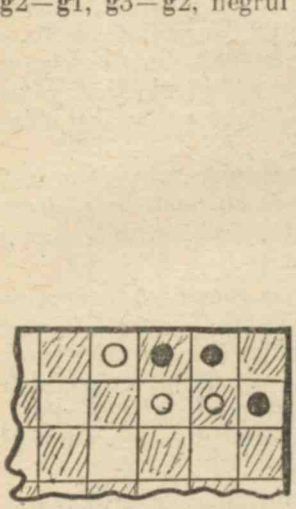

Fig. 38

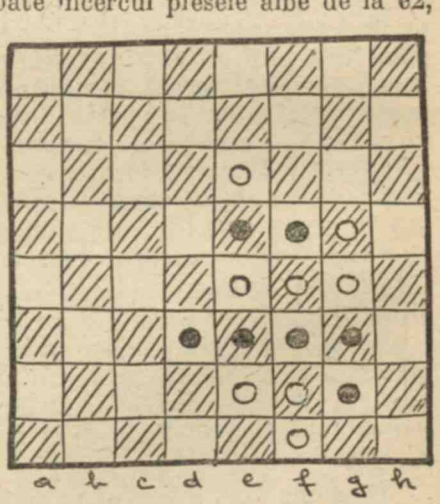

Fig. 39

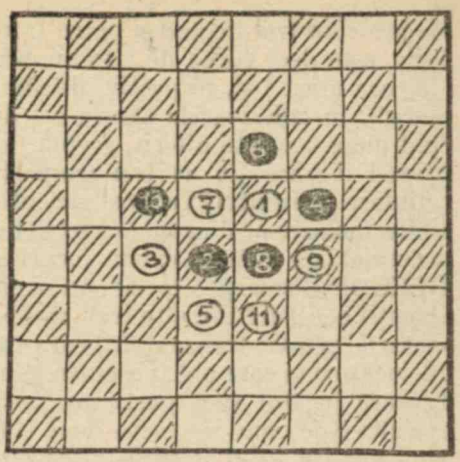

Fig. 40

f1 şi f2. Dacă albul mută e2—d2, atunci, prin e3—e2, negrul urmăreşte încercuirea pieselor de la f1 şi f2. Dacă albul mută f1—g1 (la început, sau după mutările anterioare), atunci, prin g3—h3, negrul îi iese înainte şi încercuirea este inevitabilă.

Deşi se joacă cu piese puţine, pe o tablă mică şi este guvernat de reguli simple, jocul CUGO nu pare uşor de analizat din punctul de vedere al strategiilor de cîştig sau de remiză. În orice caz, jocul simetric faţă de centrul tablei nu asigură remiza pentru cel de-al doilea jucător. Un contraexemplu este indicat în figura 40. Nici altfel de simetrii nu conduc la remiză. Jocul rămîne deci (şi pare a merita acest lucru) să fie studiat în continuare.

4.6. Moară tridimensională

Trecerea din plan în spaţiu este una dintre cele mai fertile idei în materie de jocuri logice. Desigur, o asemenea generalizare nu duce totdeauna la jocuri principial noi (nu ştiu, de pildă, cît de interesant ar putea fi şahul pe sferă...), dar, de cele mai multe ori, conduce la jocuri cel puţin la fel de atractive ca acelea de plecare. Moara tridimensională este însă un caz fericit. Ea generalizează jocurile plane de tip *n*-în-rînd, mai exact, se referă la variantele tridimensionale

ale jocurilor trei-în-rînd și patru-în-rînd. Din punct de vedere logic este deci vorba de cîte un cub de dimensiuni 3×3×3 („moara mică") și, respectiv, de dimensiuni 4×4×4 („moara mare"), în cubușoarele cărora cei doi jucători pot plasa pe rînd piese colorate diferit, scopul fiecăruia fiind de a realiza primul o formație de trei (respectiv, patru) piese proprii coliniare (orizontal, vertical sau oblic, în toate pozițiile posibile, inclusiv pe diagonalele fețelor cubului și pe diagonalele acestuia). În comerț există jocuri de acest tip, produse de RECOOP-București; ele se prezintă sub forma unor construcții constînd din cîte trei, respectiv, patru, platouri din material plastic transparent, care au fiecare cîte 9, respectiv, 16 locașuri în care pot fi așezate jetoane colorate (vezi fig. 41). Fiecare jucător (pot participa 2—3 persoane la o partidă) are cîte 8 jetoane la moara mică și cîte 20 la cea mare. Aici vom analiza jocul „complet", cu cîte 13 piese de fiecare jucător la moara mică și cu cîte 32 de piese de fiecare jucător la moara mare. (La moara mică un locaș rămîne liber, la cea mare toate vor fi în finalul jocului ocupate — dacă jocul nu se încheie mai devreme.) De fapt, instrucțiunile RECOOP prezintă o altă variantă a jocului, în care învingător nu este cel care face primul o moară, ci cel care realizează mai multe mori (precum și un joc similar morii propriu-zise din plan). Pentru început, să discutăm însă prima variantă, deoarece aceasta generalizează efectiv jocurile plane amintite. Cum am văzut, aceste jocuri plane nu sînt interesante (deși sînt

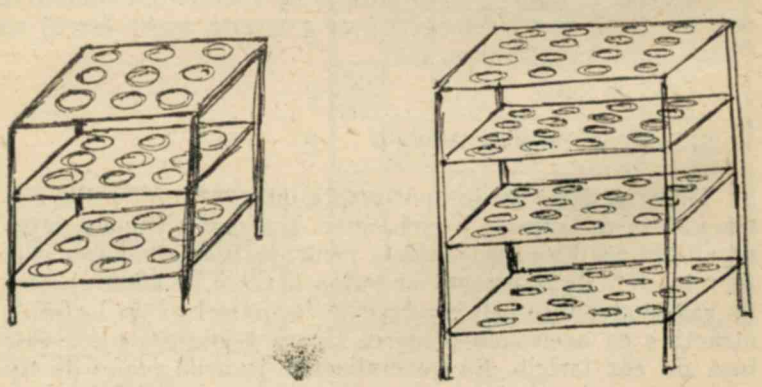

Fig. 41

destul de mult jucate de copii), deoarece, în amîndouă, cel de-al doilea jucător are strategie de remiză.

Ce se întîmplă în spațiu? După cum se poate constata ușor, primul jucător învinge totdeauna la moara mică, chiar dacă la prima mutare i se interzice să ocupe centrele celor trei platouri: el ocupă un colț al platoului de sus (simetric pentru colțurile de jos), apoi, în funcție de mutarea adversarului, el joacă numai într-un plan care nu conține piesa adversă, astfel încît la fiecare mutare are două piese pe o linie (deci adversarul are răspunsul obligat de fiecare dată) și după trei mutări își poate crea două posibilități simultane de a face moară, deci nu mai poate fi împiedicat să cîștige. Verificați că această strategie funcționează.

În concluzie, acest „ticktacktoe tridimensional" nu pare interesant. Pentru moara mare situația este similară teoretic, dar diferită practic: de curînd se pare că s-a demonstrat că și la moara mare primul jucător are strategie cîștigătoare. Rezultatul a fost însă obținut în urma unui dialog de cîteva luni între un calculator și un cercetător și se prezintă sub forma unei liste enorme de variante de joc, o listă atît de lungă încît nu poate fi în nici un fel utilă unui om. Ceea ce face complet neinteresantă din punct de vedere practic această strategie și păstrează intact interesul față de joc (cel puțin la nivelul „ne-experților" și în modelul RECOOP, cu numai 20 de piese de fiecare jucător).

Să trecem la varianta de joc „cine face mai multe mori în urma plasării tuturor pieselor". Din păcate, atît la moara mare cît și la cea mică, jucată corect, orice partidă (între doi parteneri) se termină remiză! Justificarea acestei afirmații comportă doi pași:

1. *Al doilea jucător are strategie de remiză.* Cheia acestei strategii este jocul simetric în raport cu adversarul, simetria fiind considerată față de piesa din centru la moara mică și față de oricare dintre axele și planele de simetrie ale cubului care nu trec printr-o piesă, în cazul morii mari, inclusiv față de centrul cubului (avem, într-un fel, șapte asemenea strategii de remiză: față de centrul cubului, față de cele două plane verticale nediagonale care trec prin centrul cubului, față de planul orizontal care trece prin centrul cubului, față de axa verticală a cubului și față de cele două axe orizontale nediagonale care trec prin centrul cubului). O remarcă în plus pentru cazul $3 \times 3 \times 3$, în care locașul din centru este propriul

lui simetric. Dacă adversarul nu joacă aici, nu sînt probleme. Dacă el joacă în centru, atunci jucăm oriunde, într-un loc gol. Dacă la un moment dat ar trebui să jucăm acolo unde am jucat deja, jucăm din nou în altă parte, piesa anterior introdusă în joc îndeplinind sarcina mutării curente.

În acest fel, ambii jucători realizează același număr de mori. Într-adevăr, dacă primul jucător închide o moară, atunci al doilea închide moara simetrică, iar dacă o moară este propria ei simetrică (morile perpendiculare pe planele verticale, de exemplu), atunci ele nu vor fi adjudecate de nici un jucător.

De remarcat că raționamentul anterior funcționează indiferent cît de multe piese are fiecare jucător.

2. *Nici un jucător nu are strategie cîștigătoare.* Din punctul anterior (în varianta „completă", cu cîte 13, respectiv, 32 de piese de fiecare jucător), rezultă că primul jucător nu are strategie cîștigătoare. Nici al doilea jucător nu are strategie cîștigătoare, deoarece, în caz contrar, și primul jucător ar avea o asemenea strategie. Într-adevăr, după ce ar face prima mutare la întîmplare, el se poate considera „al doilea", deci poate aplica strategia cîștigătoare a acestuia. Faptul că are deja o piesă în joc este, evident, un avantaj (la fel ca la punctul 1, cînd ne-am referit la moara mică).

Ce ne rămîne de făcut pentru a „salva" aceste jocuri? Există mai multe posibilități:

a. Să jucăm în trei. Toată discuția anterioară se referă la partide între două persoane/echipe. Jocul produs de RECOOP conține jetoane de trei culori, iar trecerea de la doi parteneri de întrecere la trei conduce la modificări de strategie complet imprevizibile pentru majoritatea jocurilor. În particular, pentru jocurile noastre între trei parteneri coalițiile voluntare sau involuntare care se pot forma fac imposibile orice strategii de cîștig sau remiză.

b. Moara mare, în varianta „cine face primul...", rămîne interesantă și pentru două persoane, deoarece strategia de care vorbeam, cea obținută pe calculator, nu este explicită, nu poate fi de folos practic.

c. Să jucăm „incomplet", cu 8, respectiv, 20 de piese de jucător; în acest caz, al doilea jucător are strategie de remiză, dar primul nu are o asemenea strategie: pentru a putea juca după eventuala strategie cîștigătoare a celui de-al doilea, primul jucător ar trebuie să joace și ultimul, ceea ce nu este

echitabil, sau să se completeze toate locașurile de pe platouri — eventual fără centru, la moara mică.

d. Să ignorăm strategiile de remiză și să jucăm „la cîștig" (chiar dacă s-ar putea atunci să pierdem).

e. Să considerăm și o fază suplimentară a jocului, în care piesele să fie și mutate: dacă după introducerea pieselor în joc s-au obținut un număr egal de mori de către fiecare jucător, să se mute pe rînd cîte o piesă, dintr-un locaș într-un locaș vecin, orizontal sau vertical (nu și oblic sau pe diagonalele platourilor), pînă ce unul dintre jucători realizează o moară în plus sau, eventual, unul dintre jucători nu mai poate muta (și pierde). Dacă o poziție ciclează (se repetă identic măcar o dată), partida trebuie, totuși, declarată remiză.

f. O idee și mai atractivă este practicarea unei variante tridimensionale a morii propriu-zise din plan: la realizarea unei formații de trei, respectiv, patru piese coliniare, jucătorul respectiv să captureze o piesă adversă (dar nu una care face parte dintr-o moară a acestuia). După ce toate piesele au fost introduse în joc (cîte 8 la moara mică și cîte 20 la cea mare), piese sînt mutate, la fel ca la punctul e. Din nou, la formarea unei mori se capturează o piesă adversă. Cîștigător este cel care-și duce adversarul în situația de a nu mai avea decît două piese la moara mică și trei la cea mare.

Pe cubul $4 \times 4 \times 4$, acest joc promite a fi destul de interesant. În cazul $3 \times 3 \times 3$, din nou primul jucător poate cîștiga de fiecare dată, deoarece încă de la faza de introducere a pieselor în joc el poate captura trei piese adverse, fără a pierde nici una.

g. O ultimă idee este transformarea jocului în joc de o singură persoană, formulînd anumite probleme în legătură cu el. De pildă, care este numărul maxim de mori care pot fi formate în cazul $3 \times 3 \times 3$ cu opt piese? Justificați răspunsul printr-un raționament cu „alură" matematică, nu prin încercări, pentru că oricum sînt prea multe variante. Apropo: în cîte moduri distincte pot fi plasate cele opt piese pe cele trei platouri? Răspunsul la ultima întrebare rămîne în seama cititorului (ca și sarcina de a imagina și alte asemenea probleme). Prima problemă va fi rezolvată aici. Răspunsul este *șase* și justificarea acestei afirmații se poate face în următorii doi pași:

1. Șase mori pot fi, într-adevăr, obținute cu cele opt piese. De exemplu, dacă piesele se așază toate într-un plan (ori-

zontal, vertical sau oblic), acel plan conține nouă locașuri și ele sînt dispuse ca în figura 42. Unul dintre aceste locașuri este liber, celelalte ocupate. Se pot astfel forma 4, 5 sau 6 mori, după cum rămîne liber centrul, un colț sau o poziție de mijloc dintre cele din figura 42.

2. *Mai mult de șase mori nu pot fi obținute.* În primul rînd, pentru a forma mai mult de șase mori, cele opt piese ar trebui să nu se găsească într-un singur plan, altfel revenim la punctul anterior.

Să presupunem că s-au format șapte sau mai multe mori cu cele opt piese. Dacă ar fi realizate separat, independente una de alta, șapte mori ar necesita 21 de piese. Există însă piese care intră în mai multe mori. Dacă fiecare piesă ar intra în cel mult două mori, atunci s-ar obține $2 \times 8 = 16$ dintre cele 21 de piese necesare. Rezultă deci că există piese care participă la trei sau mai multe mori.

Să ne fixăm asupra unei asemenea piese și să privim trei mori care trec prin ea. Aceste trei mori fiind diferite, ele folosesc exact șapte piese. Dacă aceste piese s-ar găsi toate într-un plan, atunci numai piesa a opta este în afara acestui plan și deci ea nu intră în nici o moară. Cu șapte piese într-un plan nu pot fi însă formate decît cel mult 5 mori. Rezultă deci că cele trei mori care trec prin piesa asupra căreia ne-am oprit nu se găsesc în același plan. Oricare două mori determină însă un plan care este distinct de planele definite de celelalte perechi de mori (cele trei mori determină trei drepte concurente în piesa desemnată). În fiecare dintre aceste trei plane există deci cîte cinci piese. Dacă piesa a opta nu se găsește în nici unul dintre aceste plane, atunci ea nu va forma nici o moară nouă (oricare moară nouă conține două piese vechi, deci moara nouă trebuie să

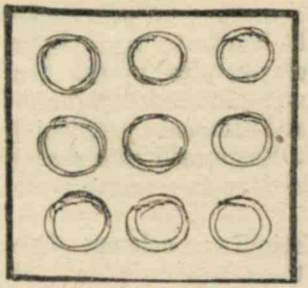

Fig. 42

se găsească într-un plan din cele trei, deci și piesa a opta trebuie să se găsească acolo). Dacă piesa a opta se găsește într-unul dintre cele trei plane, atunci în acel plan ea poate forma o moară în plus. Cîte cel mult o moară în plus în fiecare plan înseamnă cel mult trei mori suplimentare. În total pot fi deci obținute cel mult șase mori. În nici o variantă nu putem deci obține șapte mori, șase este numărul maxim căutat; demonstrația este completă.

Jocurile anterioare (moara $4 \times 4 \times 4$, de fapt) au și o altă variantă constructivă, dar și logică: așezarea pieselor nu pe platouri ca în figura 41, ci pe șaisprezece tije (ca în fig. 43), dispuse în rînduri de cîte patru. Pe fiecare tijă pot fi introduse cîte patru piese (cilindrice de data aceasta), deci din nou obținem un cub $4 \times 4 \times 4$. Bineînțeles, piesele nu mai pot fi așezate acum oriunde, la orice nivel, ci numai de jos în sus, pe fiecare tijă, pas cu pas. Acest lucru simplifică jocul, făcînd ceva mai ușor de urmărit posibilitățile de formare de mori proprii sau adverse. Pot fi jucate tot două variante: „cine face primul?" și „cine face mai multe mori?" și din nou în cel de-al doilea joc cel de-al doilea jucător are strategie de remiză. De data aceasta simetria nu mai ajută, neputînd fi urmată, dar jucînd de fiecare dată deasupra primului jucător se formează (folosind cîte 32 de piese de fiecare culoare) cîte 20 de mori de fiecare jucător. Într-adevăr, cei doi jucători își împart etajele, fiecare acoperind complet cîte două. Nu se vor forma astfel decît mori orizontale, cîte zece în fiecare etaj.

Bineînțeles, strategia anterioară nu poate fi folosită și pentru jocul cu platouri, deoarece primul jucător are acces de la început la orice etaj, deci inclusiv la nivelurile 2 și 4, cele „rezervate" jucătorului al doilea la jocul pe tije.

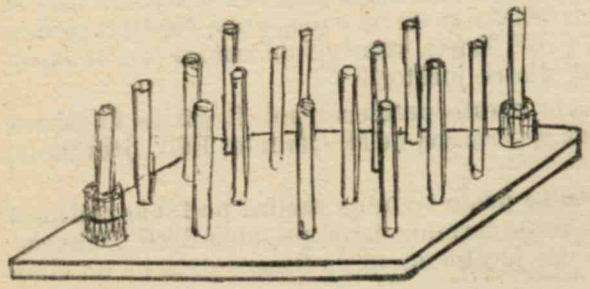

Fig. 43

Varianta „cine face primul o moară" rămîne interesantă și în acest caz (s-ar putea să fie chiar mai interesantă decît pentru jocul cu platouri, deoarece strategia de cîștig pentru primul jucător nu poate fi transpusă pentru jocul cu tije și nu știu să se fi găsit una specifică pentru acest caz, nici folosind calculatorul).

4.7. Jocul evitării pătratelor și IMPAS

Este vorba despre două jocuri care fac parte dintr-o „trusă" produsă de curînd de RECOOP, numită FLEX și subintitulată „cincizeci de jocuri logice competitive". Cincizeci de jocuri, desfășurîndu-se, toate, pe același „teren", o tablă de șah (un caroiaj cu 8×8 căsuțe), sau pe un colț al ei (de dimensiuni 3×3) și cu aceleași piese: jetoane identice, bicolore. Jocuri cu aceeași „mecanică", pentru a împrumuta termenul folosit de autorul FLEX-ului, matematicianul Anton Șerban, o „mecanică", iată, foarte FLEXibilă (pentru că de aici vine numele setului).

Bineînțeles, nu voi prezenta aici setul FLEX ca atare. Mai exact, nu voi aminti decît două dintre cele cincizeci de jocuri, deși multe altele au fost discutate în literatură, pentru unele dintre ele găsindu-se strategii de remiză sau de cîștig, sau propunîndu-se (și rezolvîndu-se) probleme conexe interesante din punctul de vedere al lucrării de față.

Primul joc din set este „Jocul evitării pătratelor" și a fost imaginat de Martin Gardner: Fiecare jucător pune cîte un pion (de culoarea proprie) într-o căsuță liberă a tablei. Cel care formează un pătrat, de orice dimensiuni și în orice poziție, cu piesele proprii pierde.

Că jocul se termină totdeauna este clar. Se poate însă el termina nedecis (fără a se forma pătrate nici după acoperirea completă a tablei)? Există strategii de remiză sau de cîștig pentru vreunul dintre jucători?

Răspunsuri la aceste probleme pot fi găsite în cartea *Alte amuzamente matematice*, de M. Gardner, Edit. Științifică, 1970.

Nu, jocul nu se poate termina remiză pe table mai mari de 7×7, dar se poate termina astfel pe tabla 6×6. De exemplu, dacă al doilea jucător mută de fiecare dată pe un cîmp

care reprezintă rotația cu 90 de grade față de centrul tablei a poziției ocupate ultima dată de adversar, se ajunge la o poziție nedecisă. Este clar că și alte asemenea moduri simetrice de a juca (simetric față de axele verticale sau orizontale ale tablei sau față de centrul acesteia) asigură remiza pentru cel de-al doilea jucător, pe orice tablă de dimensiuni pare. Și, deoarece remiza nu este posibilă pe table mai mari de 7×7, rezultă că aceste strategii conduc, de fapt, la victorie.

Rămîn deci interesante tablele de dimensiuni impare, începînd cu 7×7.

O problemă conexă: cîte pătrate diferite sînt posibile pe o tablă de dimensiuni $n \times n$? Răspunsul poate fi găsit (fără demonstrație) tot în cartea lui M. Gardner: acest număr — îl notăm cu $Q(n)$ — este egal cu

$$Q(n) = (n^4 - n^2)/12.$$

Această relație poate fi demonstrată prin inducție matematică în felul următor.

Se poate vedea imediat că pentru valori mici ale lui n, $n = 1$, $n = 2$ etc., formula este adevărată.

O presupunem adevărată pentru n oarecare și încercăm să o deducem și pentru $n + 1$. Numărul pătratelor distincte pe o tablă $(n + 1) \times (n + 1)$ ar trebui să fie deci

$$Q(n + 1) = ((n + 1)^4 - (n + 1)^2)/12.$$

Dezvoltînd binoamele respective, obținem

$$Q(n + 1) = (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n)/12.$$

Să considerăm acum o tablă de dimensiuni $(n + 1) \times (n + 1)$ și să punem în evidență pe ea două table $n \times n$ ca în figura 44. Pe fiecare dintre aceste două table mici sînt po-

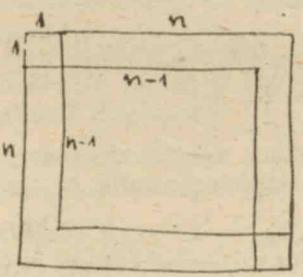

Fig. 44

sibile cîte $Q(n)$ pătrate distincte. În felul acesta au fost însă considerate de două ori pătratele de pe tabla de dimensiuni $(n-1) \times (n-1)$ comună celor două table $n \times n$. Scădem deci $Q(n-1)$ pătrate. Au rămas însă în afara celor două table $n \times n$ toate pătratele care au cel puțin două colțuri în afara intersecției acestor table, unul într-o tablă $n \times n$ și unul în cealaltă. Cîte asemenea pătrate există? Să le considerăm mai întîi pe cele cu un colț pe coloana din stînga a tablei $(n+1) \times (n+1)$ și cu unul pe linia de sus. Căsuța din stînga sus poate participa la n asemenea pătrate, toate așezate vertical. Căsuța de sub ea poate participa la $n-1$ pătrate (aplecate), făcînd pereche cu toate căsuțele de sus, mai puțin cu cele din colțuri (cu cel din stînga a fost deja considerată, iar cu colțul din dreapta nu poate forma un pătrat). Și așa mai departe, pînă la căsuța de deasupra colțului de sud-vest, care nu poate forma decît un singur asemenea pătrat. În total, obținem astfel

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

pătrate diferite.

Același număr de pătrate este obținut și pentru pătratele suplimentare cu un colț pe linia de jos și cu unul pe coloana din dreapta a tablei $(n+1) \times (n+1)$.

Am considerat însă în acest fel de două ori pătratele cu toate colțurile pe laturile tablei $(n+1) \times (n+1)$. Se vede ușor că există n asemenea pătrate.

În concluzie, numărul total al pătratelor realizabile pe tabla $(n+1) \times (n+1)$ este

$$Q(n+1) = 2Q(n) - Q(n-1) + 2n(n+1)/2 - n.$$

Din ipoteza de inducție cunoaștem valorile lui $Q(n)$ și $Q(n-1)$. Înlocuindu-le în expresia anterioară obținem

$$Q(n+1) = 2\frac{n^4 - n^2}{12} - \frac{(n-1)^4 - (n-1)^2}{12} + n^2 +$$

$$+ n - n = (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n)/12,$$

adică exact valoarea dorită. Procedura de inducție fiind completă, rezultă că, într-adevăr,

$$Q(n) = (n^4 - n^2)/12$$

pentru orice valoare a lui n.

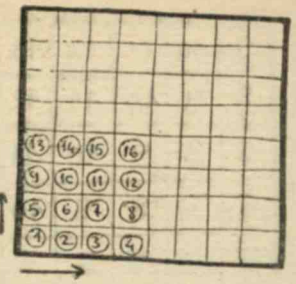

Fig. 45

Iată însă și un joc inedit pe care ni-l propune A. Șerban în setul FLEX. El se numește IMPAS și pleacă din poziția din figura 45 (cu 16 pioni identici așezați în colțul din sud-vest al tablei). Un jucător mută spre dreapta, iar celălalt în sus, o mutare constînd în deplasarea unei piese, indiferent care, pe un traseu liber, oricît de multe căsuțe dorim (precum tura la șah). Primul jucător care nu mai poate muta pierde.

Drumurile destul de bine determinate ale pieselor (în zig-zag, spre colțul din dreapta-sus) fac plauzibilă existența unei „teorii" matematice pentru acest joc (probabil că cel de-al doilea jucător are strategie de remiză). În așteptarea unei asemenea teorii, iată doar o problemă în stilul lui Nicolae Oprișiu *(Olimpiada jocurilor raționale)*: Să măsurăm distanța parcursă de piese în segmente unitare de caroiaj și să însumăm lungimea tuturor drumurilor. Care este totalul maxim (minim) posibil? O problemă de cerc școlar de matematică, deși rezolvarea este destul de simplă. Ajunge să observăm că:

1) toate drumurile care unesc două căsuțe ale tablei au aceeași lungime (egală cu semiperimetrul dreptunghiului având cele două căsuțe în colțurile de sud-vest și respectiv nord-est), deci nu contează drumurile efective, ci numai extremitățile lor;

2) dacă două piese, A și B, de coordonate (a, b) și (c, d), respectiv, ajung în căsuțele de coordonate (m, n) și (p, q), respectiv, atunci distanța totală parcursă de ele este

$$(m - a) + (n - b) + (p - c) + (q - d) =$$
$$= (m + n + p + q) - (a + b + c + d)$$

prin urmare, nu contează unde a ajuns piesa A și unde piesa B. În concluzie, deoarece poziția inițială a pieselor este

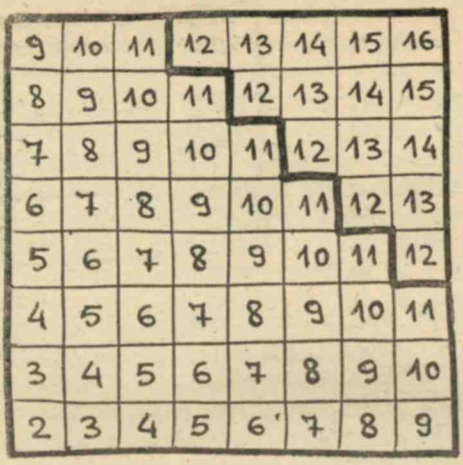

Fig. 46

bine determinată (suma coordonatelor lor este egală cu 80), distanța totală depinde numai de pozițiile finale.

Problema revine deci la a căuta 16 căsuțe ale tablei astfel încît: a) suma coordonatelor lor să fie maximă (minimă), b) aceste căsuțe să reprezinte o poziție finală a unei partide regulamentare. Cerința a) conduce ușor la rezolvarea problemei de maxim: soluția trebuie să conțină „triunghiul" delimitat de linia groasă din figura 46 (în căsuțe este trecută suma coordonatelor), plus o căsuță alăturată. Distanța totală este deci $211 - 80 = 131$.

Problema de minim nu mai este la fel de simplă. Dacă am căuta o poziție finală în care *nici unul dintre jucători să nu mai poată muta*, atunci cele două coloane din extrema dreaptă sau cele două linii de sus ar fi singurele soluții (cu un total de $192 - 80 = 112$ în ambele cazuri). Într-o partidă reală, configurația finală poate fi însă și de alte forme (partida se încheie atunci cînd jucătorul aflat la rînd nu mai poate muta). O asemenea configurație este cea din figura 47; cîștigător este jucătorul care mută în sus, iar totalul drumurilor parcurse este $165 - 80 = 85$. O partidă care să conducă la acest rezultat poate fi următoarea (mută primul jucătorul „spre dreapta"; o mutare este scrisă sub forma *n*D*m* sau *n*S*m*, *n* fiind numărul piesei în numerotarea din figura 45, D și S indică direcția mutării, iar *m* este numărul de căsuțe peste care se sare): 8D4, 8S1, 7D4, 7S1, 4D4, 8S1, 3D4, 7S1, 2D4,

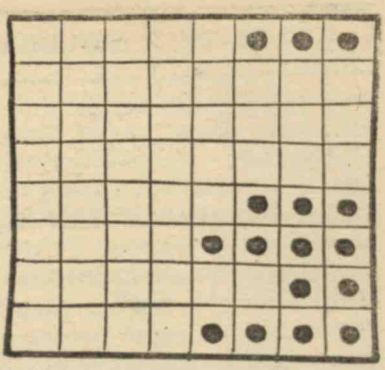

Fig. 47

8S1, 1D4, 7S1, 6D6, 8S1, 5D6, 7S1, 12D4, 8S1, 11D4, 7S1, 10D4, 8S1, 9D4, 7S1, 16D4, 13S1, 15D4, 13S1, 14D4, 13S1 13D5, 13S1.

Numărul 85 anterior este optim. Iată o demonstrație a acestei afirmații. Toate piesele trebuie mutate, deci există cel puțin 16 mutări pe verticală și 16 pe orizontală. Ne referim din nou la situația în care cel care mută spre dreapta pierde (deci pe linii piesele trebuie să ajungă pînă la marginea din dreapta). Cazul în care pierde jucătorul care mută în sus este simetric. Piesele trebuie să ajungă cît mai departe de colțul de nord-est; totuși, pentru a muta de 16 ori pe verticală, cel puțin trei piese trebuie să ajungă în acest colț: de pe linia întîi putem face șapte mutări pînă sus, șase de pe linia a doua, cinci de pe linia a treia și patru de pe linia a patra (suma a oricare două dintre numerele 4, 5, 6, 7 este mai mică decît 16). O soluție cu mai mult de trei piese mutate în sus este mai proastă decît una cu numai trei. Trei numere dintre 4, 5, 6, 7 care însumate să dea cel puțin 16 (repetate eventual) pot forma mai multe combinații; una este $4 + 6 + 6$, corespunzătoare situației din figura 47. Toate celelalte combinații dau rezultate mai slabe, cu excepția lui $5 + 5 + 6$ („pleacă" două piese din linia a treia și una din linia a doua), care este la fel de bună. Ceea ce trebuia demonstrat.

5.1. Inepuizabilul TANGRAM

Printre jocurile logice fascinante ale căror origini trebuie căutate în China antică, Tangramul ocupă o poziție specială. Joc-jucărie, conceput pentru a fi practicat de o singură persoană, legat se pare și de unele ceremonii mistice, Tangramul este ilustrarea perfectă a aforismului „maeștrii se dovedesc în lipsa mijloacelor". Într-adevăr, resursele inițiale ale jocului sînt extrem de reduse: șapte figuri geometrice (cinci triunghiuri, un pătrat și un paralelogram), regulile sînt puține și rigide, și totuși, „maeștrii" pot scoate din aceste resurse rezultate cu totul neașteptate.

În ce constă, de fapt, jocul? Este vorba să se așeze cele șapte figuri (toate și numai ele — prima regulă), una lîngă alta, fără suprapuneri (a doua regulă), în plan (regulă implicită) pentru a forma anumite figuri date, figuri cu valoare estetică sau imagini stilizate de obiecte reale. Cele șapte figuri inițiale — se mai numesc și *tanuri* — provin din decuparea într-un anume fel a unui pătrat (fig. 48). Înainte de a purcede la o discuție despre Tangram, cititorul ar trebui să-și confecționeze singur un set de figuri (din carton, linoleum sau orice alt material potrivit). Se observă că toate triunghiurile se „aseamănă" (toate sînt dreptunghice, isoscele) și că paralelogramul este singura piesă la care putem distinge fețele (întorcîndu-l pe partea cealaltă, obținem un paralelo-

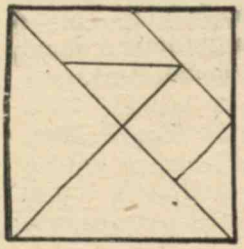

Fig. 48

gram cu orientarea diferită). De altfel, o ultimă regulă a jocului este că paralelogramul poate fi așezat cu oricare față în sus.

Nu voi prezenta aici desene realizate cu ajutorul Tangram-ului. Cititorul poate inventa singur oricîte asemenea desene, puterea de figurare a celor șapte tanuri — completată și cu puțină imaginație — fiind practic infinită. Pe de altă parte, în colecția Cartea-joc, a RECOOP-ului, va apărea în 1986 o broșură Tangram, cuprinzînd aproape 200 de figuri; această broșură prezintă, de asemenea, o serie de remarci asupra istoriei jocului, asupra unor „reflexe" ale sale în literatură, matematică etc.

Voi aminti aici numai o clasificare uzuală a figurilor Tangram și anume:

— imagini reale stilizate (oameni, animale, corăbii, construcții diverse, obiecte, unelte etc.),
— imagini decorative — simetrice
— nesimetrice
— figuri geometrice — convexe
— neconvexe
— alte figuri — litere
— cifre
— alte imagini

Peste aceste categorii se suprapune încă o clasă, anume cea a figurilor *reticulare*, cele ale căror colțuri sînt plasate exact în punctele unei rețele (nodurile unui caroiaj) care acoperă planul (a se vedea un exemplu în fig. 49). Se poate

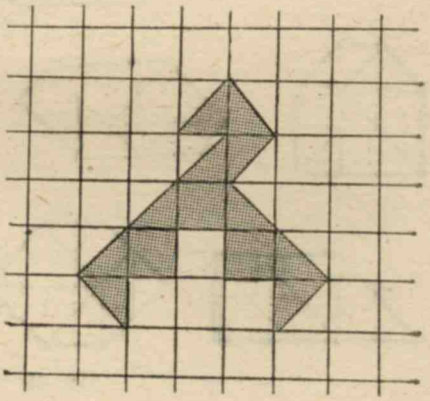

Fig. 49

dezvolta o întreagă teorie pe marginea celui mai mic poligon convex (fără „golfuri"; riguros: un poligon este convex dacă pentru oricare două puncte ale sale, segmentul determinat de ele este conținut în poligon) care conține în interiorul său o figură reticulară dată, sau pe marginea numărului de puncte ale rețelei care se găsesc pe frontiera unei figuri date (unele informații în acest sens pot fi găsite în cartea lui J. Elffers, *Tangram. Das alte chinesische formenspiel*, tradusă, în 1976, în spaniolă).

În continuare ne interesează însă o altă problemă, aflată la granița dintre Tangram și matematică și anume, cîte figuri convexe pot fi realizate cu ajutorul celor șapte piese? Una este pătratul de plecare. Alte douăsprezece sînt prezentate în figura 50. Există însă și alte asemenea figuri?

Răspunsul la această întrebare naturală a fost dat abia în anul 1942, de către doi matematicieni de la Universitatea Națională din Chekiang, China: *acestea sînt toate figurile*

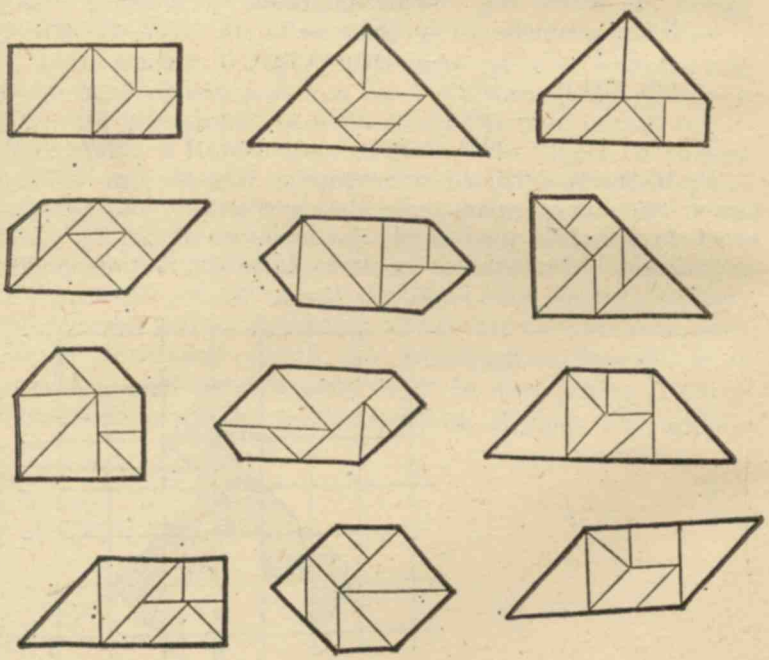

Fig. 50

convexe realizabile cu ajutorul Tangram-ului. Iată, pe scurt, prima parte a raționamentului celor doi matematicieni, pe nume Fu Traing Wang și Chuan Chih Hsing, așa cum este el reluat în cartea citată a lui J. Elffers.

Plecăm de la observația că toate cele șapte piese pot fi descompuse în triunghiuri Tangram mici. Pătratul inițial are suprafața de 15 asemenea triunghiuri (le numim *triunghiuri de bază).* Pentru un triunghi de bază, să numim *laturi raționale* cele două laturi perpendiculare și *latură irațională* (are lungimea de $\sqrt{2}$ ori mai mare) ipotenuza. Să presupunem că am format un poligon convex cu cele 16 triunghiuri de bază. Laturile acestuia vor fi și ele raționale sau irațională, după cum sînt formate numai din laturi raționale sau nu ale triunghiurilor de bază (numai suma a două laturi raționale dă un total rațional).

Triunghiurile de bază au unghiuri de cîte 45° și de 90°. Două laturi ale poligonului convex care se întîlnesc într-un vîrf al său formînd un unghi drept trebuie deci să fie de același tip, ambele raționale sau ambele iraționale (și deci trebuie să fie de tipuri diferite dacă unghiul dintre ele este ascuțit — 45° — sau obtuz — 135°).

Să presupunem că poligonul nostru are n laturi, deci n unghiuri, și că p dintre acestea sînt ascuțite, q sînt drepte și r obtuze. Avem deci egalitatea

$$p + q + r = n$$

Să ne reamintim însă din școală că suma unghiurilor interne într-un poligon cu n laturi este egală cu

$$180 \times (n - 2)$$

de grade. Obținem astfel ecuația

$$45p + 90q + 135r = 180(n - 2)$$

adică

$$p + 2q + 3r = 4(n - 2)$$

Din relația $p + q + r = n$ anterioară, scoatem

$$r = n - p - q$$

deci

$$p + 2q + 3n - 3p - 3q = 4n - 8$$

adică

$$2p + q = 8 - n.$$

Deoarece p și q sînt numere pozitive, rezultă că și $8 - n$ este pozitiv deci

$$n \leqslant 8.$$

Poligonul nostru convex nu poate fi decît cel mult un octogon. În consecință, și p, q, r trebuie să ia valori reduse și anume, putem obține:

— opt unghiuri obtuze (opt laturi),
— un unghi drept și șase obtuze (șapte laturi),
— două unghiuri drepte și patru obtuze (șase laturi),
— trei unghiuri drepte și două obtuze (cinci laturi),
— un unghi drept, unul ascuțit și trei obtuze (cinci laturi),
— patru unghiuri drepte (patru laturi),
— două unghiuri ascuțite și două obtuze (patru laturi),
— un unghi ascuțit, două drepte și unul obtuz (patru laturi),
— două unghiuri ascuțite și unul drept (trei laturi).

Toate aceste poligoane pot fi „înscrise" într-un dreptunghi în sensul figurii 51, cu laturile raționale ale poligonului suprapuse peste laturi opuse ale acestui dreptunghi.

Să notăm cu u lungimea unei laturi raționale a unui triunghi de bază și să evaluăm cu unitatea u segmentele care apar în figura 51. Mai exact, notăm

$$PQ = xu, \quad PS = yu$$
$$PA = PH = au$$
$$BQ = QC = bu$$
$$GS = SF = du$$
$$DR = ER = cu$$

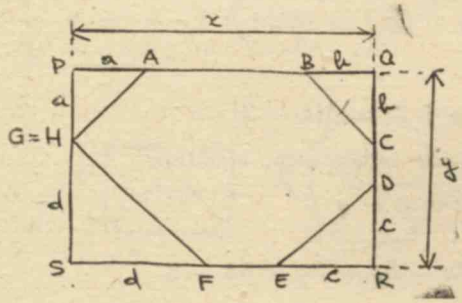

Fig. 51

Bineînțeles,

$$x \geqslant 2,\ y \geqslant 2,$$
$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ d \geqslant 0,$$
$$a + b \leqslant x,$$
$$c + d \leqslant x,$$
$$a + d \leqslant y,$$
$$b + c \leqslant y.$$

Pe de altă parte, suprafața unui triunghi de bază este $u^2/2$, deci suprafața dreptunghiului ($xu \times yu = 2xy \times u^2/2$) este de $2xy$ ori suprafața unui triunghi de bază. La fel, suprafața triunghiului PAH este de a^2 ori suprafața unui triunghi de bază, suprafața triunghiului QBC este de b^2 ori suprafața unui triunghi de bază etc. Suprafața dreptunghiului este deci compusă din cele patru triunghiuri PAH, BQC, DRE și FSG, plus suprafața celor 16 triunghiuri de bază, deci obținem

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 16 = 2xy.$$

Deoarece

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$$

rezultă că

$$2xy - 16 \geqslant 0$$

adică

$$xy \geqslant 8.$$

Bineînțeles, toate numerele x, y, a, b, c, d sînt întregi. Din ecuațiile și inecuațiile anterioare, cei doi matematicieni chinezi deduc (prin argumente ceva mai tehnice decît cele dinainte) că există numai douăzeci de sextupluri (x, y, a, b, c, d) posibile, iar dintre acestea, ținînd seama că unele dintre cele 16 triunghiuri de bază sînt deja „legate" în figuri mai mari, rezultă că numai treisprezece figuri sînt realizabile cu piese Tangram.

În încheierea acestei secțiuni, o remarcă asupra figurii 48, fără legătură cu Tangramul în sine: puteți trasa această figură fără a ridica creionul și fără a trece de două ori peste o linie? Răspunsul este *nu* și se justifică foarte ușor: există șase puncte *impare*, din care vin (sau pleacă) trei linii. După cum se știe încă de la Euler (problema podurilor din Königs-

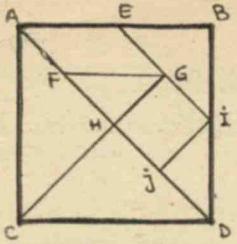

Fig. 52

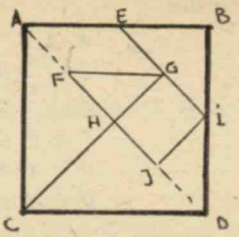

Fig. 53

berg), numai figurile cu zero sau două noduri impare pot fi trasate astfel (orice linie are zero sau două capete, după cum este deschisă sau închisă). Aici avem nevoie de trei linii, de trei aşezări ale creionului pe hîrtie. Se poate însă formula următoarea problemă interesantă: care este linia de lungime maximă care poate fi trasată pe acest desen dintr-o singură trăsătură? (Simetric: să se traseze dintr-o singură trăsătură de creion tot desenul, repetînd unele segmente, astfel încît porţiunile repetate să fie de lungime totală minimă.)

Problema este mai simplă decît pare. Să desenăm din nou figura 48, notînd cu litere punctele de intersecţie (fig. 52). Punctele *A*, *C*, *E*, *F*, *J* şi *D* sînt impare. Problema cere deci să elimimăm unele segmente din figură astfel încît numai două puncte să rămînă impare. Acest lucru poate fi realizat în mai multe feluri; cea mai economicoasă eliminare se obţine pentru segmentele *AF* si *JD*. Suma lungimilor lor egalează jumătate din diagonala pătratului şi este clar că o soluţie mai bună nu există. Figura rezultată (fig. 53) conţine numai două noduri impare, *E* şi *C*. Plecînd din *C*, pe ruta *C H G F H J I G E A C D I B E*, se poate realiza parcurgerea dorită.

5.2. Cubul SOMA

Tangramul este inepuizabil nu numai la nivelul combinaţiilor posibile cu cele şapte tanuri, ci şi în ceea ce priveşte mulţimea jocurilor în care pot fi descoperite trăsături ale sale. Cubul SOMA, inventat de fizicianul şi scriitorul danez Piet Hein, autorul, printre altele, şi al jocului Hex, este probabil cea mai reuşită replică tridimensională (mai reuşită din punct de vedere logic decît modernul „şarpe Rubik",

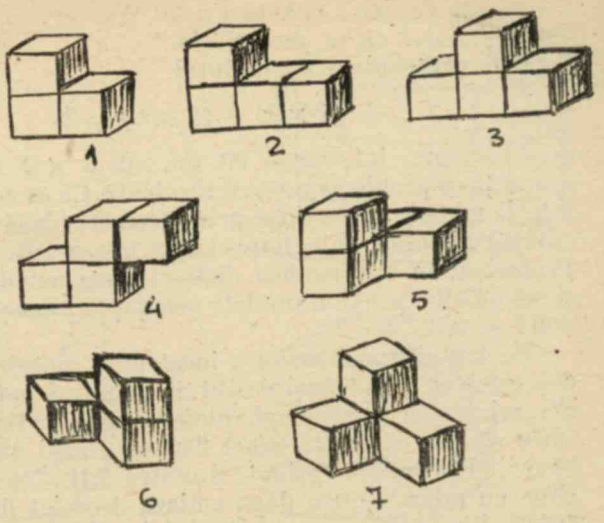

Fig. 54

foarte decorativ, dar mai sărac în posibilități „combinatorice").

Despre ce este vorba? Presupun că cititorul cunoaște jocul (sau chiar dispune de un cub SOMA, prezent și în magazinele noastre, sub numele COMBICUB). Avem la dispoziție șapte piese (fig. 54), formate din cîte trei sau patru cubușoare unitare. Dar nu orice fel de piese, ci *toate* cele care pot fi formate cu cîte trei sau patru cubușoare lipite pe cîte o față (nu pe muchii sau într-un singur colț, să zicem) și astfel încît corpul rezultat nu este convex. Cu alte cuvinte, nu luăm în seamă și piese de formele din fig. 55, fără „golfuri".

Există exact șapte piese care se pot obține astfel, una singură cu trei cubușoare și șase cu cîte patru. Deși piesele sînt obținute în acest mod „neutru", fără a fi dinainte „aranjate" astfel încît lucrurile să iasă bine, cu ele poate fi rezolvată următoarea problemă naturală: realizarea unui cub de dimensiuni $3 \times 3 \times 3$! Se spune că Piet Hein a imaginat această problemă (și a inventat cubul SOMA) în timpul unei

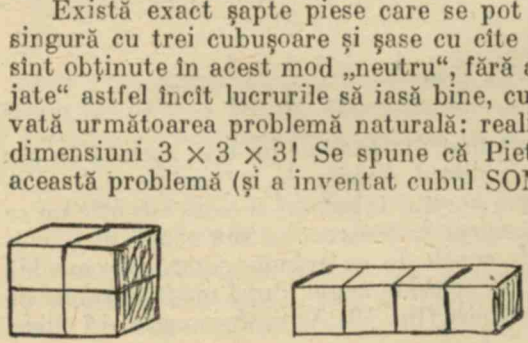

Fig. 55

conferințe de fizică cuantică a lui Werner Heisenberg, întrezărind mintal că ea are soluție.

Cele șapte piese au în total

$$(3 \times 1) + (4 \times 6) = 27$$

de cubușoare, tot atîtea cît un cub $3 \times 3 \times 3$. O primă, speranță că problema poate fi rezolvată. Că ea are, într-adevăr, soluție ne putem convinge prin încercări (dacă nu cumva am cumpărat cubul deja împachetat într-o cutie $3 \times 3 \times 3$). Problemă: în cîte moduri distincte (excluzînd deci rotațiile și oglindirile) pot fi asamblate cele șapte piese pentru a da un cub?

Pentru cititorul care s-a jucat deja cu cubul SOMA și a constatat că este totuși destul de greu (cel puțin la început) să ...reintroducem cele șapte piese în cutie, va fi poate surprinzător să afle că există exact 240 de soluții diferite ale problemei! Ele au fost obținute de către J.H. Conway și M.J.T. Guy, cu mîna, „într-o după-amiază deosebit de ploioasă, în 1981". Bineînțeles, nu voi face aici o listă a acestor posibilități. Voi relua însă din *Winning ways*..., cartea de mai multe ori citată, cîteva observații privind „secretele" cubului SOMA, restricțiile pe care trebuie să le avem în vedere la rezolvarea lui.

Pentru început, să distingem cubușoarele cubului $3 \times 3 \times 3$ în funcție de poziția ocupată de ele. Avem:

— 8 cubușoare de colț (le notăm cu *V*; vezi figura 56),
— 8 cubușoare de mijloc de latură (*E*),
— 6 cubușoare la centrele fețelor (*F*),
— 1 cubușor în centrul cubului (*C*).

Să privim acum piesele. Ele pot ocupa cel mult, respectiv, numărul de colțuri din tabelul următor:

piesa	1	2	3	4	5	6	7	
colțuri	1	2	2	1	1	1	1	(total nouă)

Rezultă că exact una dintre piese nu este așezată în așa fel încît să ocupe numărul maxim de colțuri pe care ea le poate ocupa conform acestui tabel. În această situație nu se poate afla piesa numărul 3, deoarece ea sau ocupă două colțuri sau nici unul. În concluzie, ea trebuie așezată pe o muchie a cubului (fig. 57). Să colorăm acum, după modelul tablei de șah, cele 27 de cubușoare (fig. 58). Vom avea astfel 14 cubu-

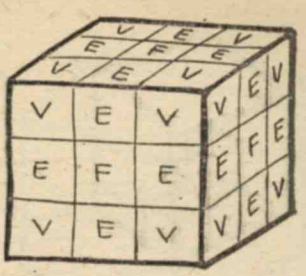

Fig. 56

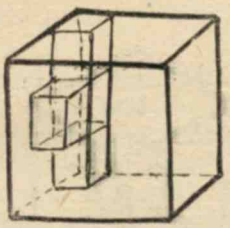

Fig. 57

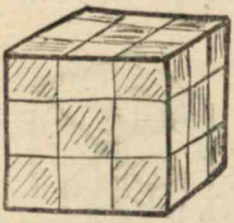

Fig. 58

șoare negre ($V + F$) și 13 cubușoare albe ($E + C$). Să observăm în cîte moduri pot acoperi cele șapte piese cubușoarele albe și negre:

piesa 1 — 2 albe și 1 negru sau 2 negre și 1 alb,
piesa 2 — 2 albe și 2 negre, oricum ar fi așezată,
piesa 3 — 3 negre și 1 alb, deoarece nu poate fi așezată decît pe o muchie a cubului,
piesa 4 — 2 albe și 2 negre, oricum ar fi așezată,
piesa 5 — idem,
piesa 6 — idem,
piesa 7 — 3 albe și 1 negru sau 3 negre și 1 alb.

Deoarece piesele 2 — 6 au totdeauna același număr de cubușoare albe și negre, respectiv 11 cubușoare negre și 9 cubușoare albe, pentru a realiza 14 cubușoare negre și 13 albe trebuie ca:

— piesa 1 să ocupe 2 cubușoare negre și unul alb,
— piesa 7 să ocupe un cubușor negru și 3 albe.

În concluzie, pentru piesele 1, 3, 7 avem restricții precise la plasarea în cub: piesa 3 ca în figura 57, iar 1 și 7 ca în figurile 59, respectiv, 60. Plasînd aceste piese corect, rezolva-

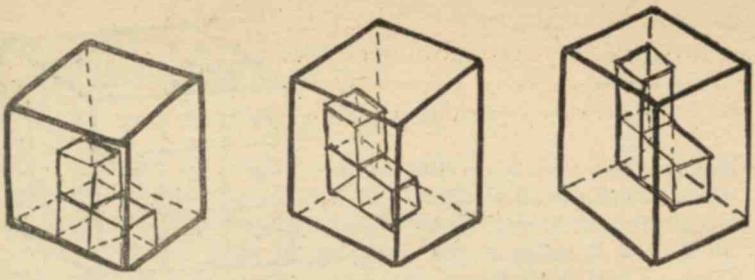

Fig. 59

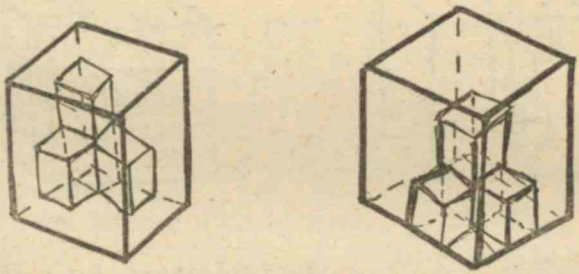

Fig. 60

rea problemei este apoi foarte ușoară. În orice caz, dacă la un moment dat observăm că piesele „nu mai încap în cutie", este bine să verificăm dacă nu cumva una dintre cele trei piese nu a fost deja plasată altfel decît trebuie și atunci, oricum am încerca să le potrivim pe celelalte, nu vom ajunge la nici un rezultat.

În *Winning ways*... sînt prezentate alte două jocuri de asamblare a unor piese într-un cub. Primul este relativ simplu: să se asambleze șase piese ca în figura 61a și trei cubușoare ca în figura 61b, într-un cub de dimensiuni $3 \times 3 \times 3$. Pentru a ajunge la soluție altfel decît prin încercări trebuie din nou să observăm ce restricții intervin la așezarea acestor

Fig. 61

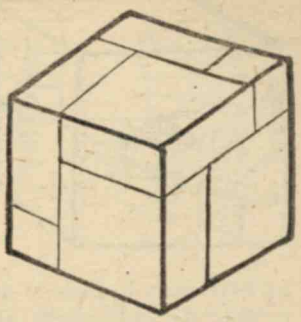

Fig. 62

piese într-un cub. Cititorul ar trebui să încerce singur înainte de a trece mai departe. Răspunsul este aproape vizibil: Piesele de tip **a** conțin cîte 4 cubușoare. Oricum am așeza aceste piese în cubul $3 \times 3 \times 3$, ele vor ocupa 0, 2 sau 4 cubușoare din orice felie, fie ea orizontală sau verticală. Reținem doar că fiecare piesă de tip **a** participă cu un număr par de cubușoare la orice felie a cubului. Bun, dar orice felie a cubului $3 \times 3 \times 3$ conține exact 9 cubușoare, deci un număr impar. Rezultă că în orice felie trebuie să apară cîte un cubușor separat și acest lucru nu se poate întîmpla decît dacă cele trei piese de tip **b** sînt așezate pe o diagonală a cubului. Figura 62 indică o soluție a problemei.

O încercare mult mai dificilă este realizarea unui cub $5 \times 5 \times 5$, folosind un cub $2 \times 2 \times 2$ (fig. 63 a), un paralelipiped $2 \times 2 \times 1$ (fig. 63 b), trei paralelipipede $2 \times 1 \times 1$ (fig. 63 c) și 13 paralelipipede $2 \times 4 \times 1$ (fig. 63 d). Secretul acestui joc poate fi descoperit tot prin colorarea alternativă a cubușoarelor cubului $5 \times 5 \times 5$. Oricum ar fi făcută această colorare (cu colțurile cubului albe sau negre) și oricum ar fi

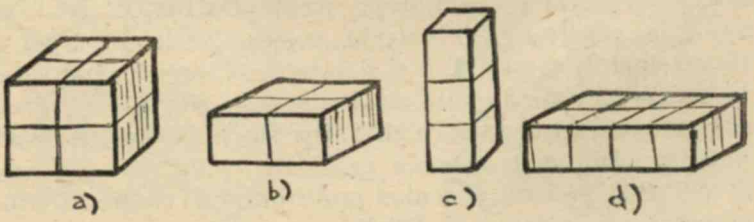

Fig. 63

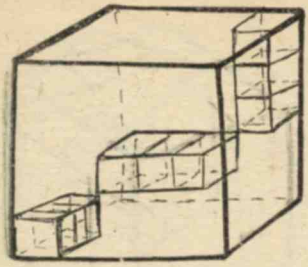

Fig. 64

așezate în cub, piesele de tip **a**, **b** și **d** vor ocupa fiecare același număr de cubușoare albe și negre. Fiecare felie a cubului conține însă cîte 25 de cubușoare, din care fie 13 sînt albe și 12 negre, fie invers. Rezultă că piesele de tip **c** participă la fiecare felie a cubului, realizînd această diferență între numărul de cubușoare negre și albe. Există o unică posibilitate de aranjare a pieselor **c** pentru a îndeplini această „sarcină", aranjarea din fig. 64 (plus oglindirile și rotațiile ei, desigur). După ce aceste piese au fost aranjate, celelalte sînt ușor de așezat la locul lor.

O problemă și mai dificilă este aceea a „împachetării" a 41 de „cărămizi" $4 \times 2 \times 1$ împreună cu 15 cubușoare $1 \times 1 \times 1$ pentru a forma un cub $7 \times 7 \times 7$. Complicarea prin mărirea numărului de piese nu este însă interesantă, de aceea acest joc pare mai puțin atractiv.

Cubul SOMA este folosit nu numai în sensul problemei anterioare, a realizării unui cub $3 \times 3 \times 3$, ci și în sensul Tangramului, pentru a realiza diferite construcții cu cele șapte piese. Numărul construcțiilor posibile este foarte mare; cititorul interesat poate găsi exemple în cartea lui Martin Gardner *Amuzamente matematice*, sau poate inventa altele noi. Și pliantul care însoțește jocul COMBICUB conține asemenea construcții. O variantă „poloneză" a cubului SOMA făcînd apel la piesele 2, 5 și 6 anterioare, precum și la alte trei piese formate din cîte cinci cubușoare (fig. 65) este prezentată în cartea amintită a lui N. Oprișiu, *Olimpiada jocurilor raționale*. Din nou se pune problema realizării unui cub $3 \times 3 \times 3$, precum și a unei multitudini de construcții, în același timp atractive și dificile.

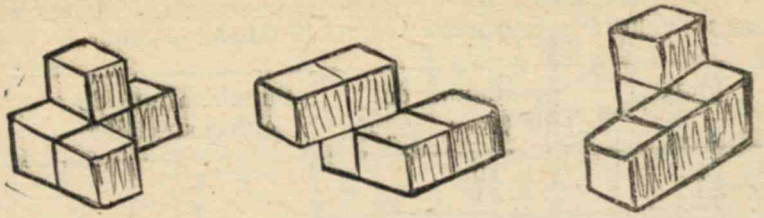

Fig. 65

Este însă „nepractic" să studiem prea mult aceste construcții, în sensul că, în loc să facem pentru fiecare „teorie", căutînd restricții de colorare sau de un alt gen, este mai ușor să rezolvăm problema prin încercări, intuitiv, exploatînd restricțiile ad-hoc ale construcției, unele vizibile cu ușurință. Apelul la un raționament de factură matematică este însă necesar pentru a demonstra că anumite construcții *nu* sînt posibile. Un exemplu este dat în cartea lui M. Gardner și merită a fi reluat pentru frumusețea lui.

Considerăm construcția din figura 66 și ne propunem s-o realizăm cu ajutorul celor 7 piese SOMA. Problema este nerezolvabilă. Pentru a vedea aceasta, să colorăm coloanele construcției ca în figura 67. Am obținut 9 coloane negre, conținînd în total 19 cubușoare negre și 4 coloane albe, formate din 8 cubușoare albe. Să examinăm acum toate posibilitățile de așezare în această construcție a celor 7 piese, pentru a vedea cîte cubușoare albe și cîte negre pot acoperi ele. Pentru că avem nevoie de 19 cubușoare negre și 8 albe, încer-

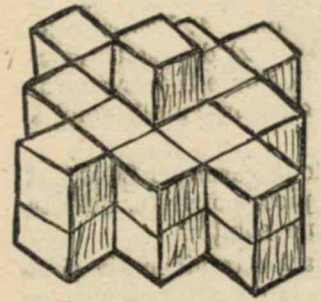

Fig. 66

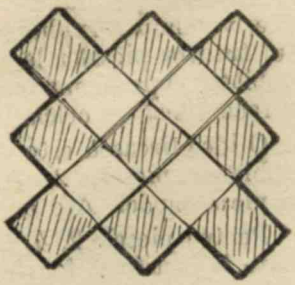

Fig. 67

căm să realizăm cu fiecare piesă cît mai multe cubușoare negre. Valorile obținute sînt trecute în tabelul următor.

piesa	nr. maxim de cubușoare negre	număr minim de cubușoare albe
1	2	1
2	3	1
3	3	1
4	2	2
5	3	1
6	3	1
7	2	2
Total	18	9

Chiar și în cele mai avantajoase așezări ale pieselor, nu putem obține 19 cubușoare negre, deci construcția nu este realizabilă. (Dacă însă cubușorul din vîrful construcției este mutat pe o coloană albă, atunci vom avea 18 cubușoare negre și 9 albe, exact cît în tabelul anterior și problema devine, într-adevăr, rezolvabilă.)

În secțiunea următoare voi discuta jocul Pentamino (în general, despre „poliominouri") și, anticipînd puțin, menționez aici faptul că orice piesă pentamino poate fi reprodusă, de trei ori mai mare, cu ajutorul celorlalte piese ale jocului.

Întrebare: în cazul cubului SOMA, încercarea similară are soluție sau nu? Mai precis, putem realiza cópii *dublate* pe orice direcție ale pieselor SOMA?

„Dublate pe orice direcție" înseamnă „cu volumul de $2 \times 2 \times 2 = 8$ ori mai mare"; folosind un singur set de piese nu putem „dubla" decît cel mult piesa 1. Pentru celelalte, volumul corpului căutat ($8 \times 4 = 32$) depășește volumul tuturor pieselor la un loc. Piesa 1 poate fi într-adevăr „dublată" și problema (cunoscută) are chiar mai multe soluții. Ce facem însă cu celelalte piese?

O idee firească este utilizarea a două garnituri SOMA și „dublarea" pieselor 2—7 folosind opt piese potrivite, diferite de piesa model. Are această problemă soluție?

Pentru piesele 2, 4, 5 și 6 răspunsul este afirmativ și el poate fi justificat foarte ușor, deoarece cu cîte patru piese SOMA poate fi realizat, în mai multe variante, un para-

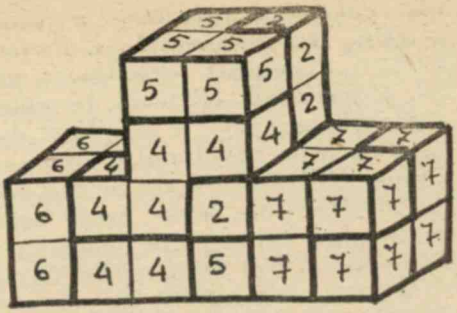

Fig. 68

lelipiped $2 \times 2 \times 4$. Din două garnituri putem realiza două asemenea paralelipipede, iar cu două paralelipipede putem realiza piesele dorite.

Şi piesa 3 poate fi „dublată" dacă folosim cîte două bucăţi din piesele 4, 5 şi 7 şi cîte una din piesele 2 şi 6. O soluţie este indicată în figura 68. Rămîne o sarcină pentru cititor „dublarea" piesei 7 (fără a folosi piese 7). Mărturisesc că nu ştiu dacă problema are sau nu soluţie, dar sper să aibă, pentru a nu distona cu cazul celorlalte piese (şi cu situaţia de la Pentamino).

5.3. Poliominouri

Următoarea problemă este aproape nelipsită din cărţile de „amuzamente matematice": se ia o tablă de şah şi i se elimină două colţuri opuse. Se iau apoi 31 de piese de domino, fiecare egală cu două pătrate ale tablei. Întrebare: pot fi aşezate aceste piese (fără suprapuneri) pe tabla astfel trunchiată?

Răspunsul este *nu*, cu o justificare pe cît de simplă, pe atît de inteligentă: orice domino acoperă un pătrat alb şi unul negru, 31 de dominouri acoperă 31 de pătrate albe şi 31 negre, dar tabla trunchiată conţine 30 de pătrate de o culoare şi 32 de cealaltă culoare. Punct.

Această problemă (şi acest gen de rezolvare, întîlnit şi mai devreme, la cubul SOMA) i-a inspirat matematicianului american S.W. Golomb o foarte interesantă generalizare, expusă pentru prima dată într-un articol apărut în 1954, în revista „The American Mathematical Monthly" (vol. 61, nr. 10, p. 675–682): „Checkers board and polyominoes".

Ideea lui este următoarea. Un *domino* este format din două pătrate, deci *două* *mino*-uri. Perfect, să considerăm *monominouri*, *trominouri*, *tetrominouri*, *pentominouri* etc. În general, *poliominouri*. (Evident, terminologia propusă de S. Golomb este sugestivă și atractivă, dar nu are nici o legătură cu etimologia cuvîntului *domino*, care vine, se pare, de la latinescul *dominus* și nu de la *do-mino*. De asemenea, o-ul din prefixele tro-, tetro-, pento- este folosit pentru a „rima" cu do-mino; cel puțin în românește este mai corect *tri*mino, de exemplu. Voi folosi totuși terminologia lui S. Golomb, cu singura deosebire că voi spune *pentamino* în loc de *pentomino*, deoarece există în comerț un frumos joc *pentamino*, produs de RECOOP-București.)

Ce sînt însă acelea poliominouri? Un domino este format din două pătrate vecine pe o latură. Cu trei pătrate putem forma două tipuri de figuri, cele din fig. 69. Avem deci două trominouri. Patru pătrate pot fi însă așezate în cinci moduri astfel încît o tură de șah să poată merge dintr-un pătrat în oricare altul prin mutări regulamentare; obținem astfel cinci tetrominouri (fig. 70), care, în funcție de forma lor pot fi identificate cu literele I, O, T, L, S.

Și așa mai departe. (Voi prezenta pentaminourile ceva mai tîrziu.) Un poliomino este deci o figură conexă formată din pătrate vecine pe cîte o latură, astfel încît o tură le poate parcurge în întregime.

Problema principală a articolului lui S. Golomb este acoperirea tablei de șah cu poliominouri de anumite tipuri.

Evident, este imposibil să acoperim tabla cu trominouri, indiferent de care formă, deoarece 64 (numărul pătra-

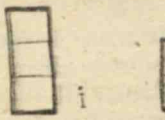

Fig. 69

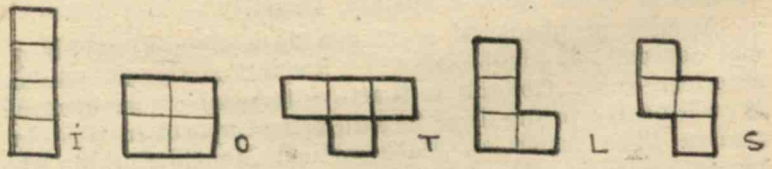

Fig. 70

telor tablei) nu este divizibil la 3 (numărul de pătrate dintr-un tromino). Putem însă acoperi tabla de șah cu 21 de trominouri drepte sau în formă de L și un monomino, cu condiția ca în cazul trominourilor drepte, monominoul să ocupe anumite poziții bine precizate. Iată, urmînd articolul lui S. Golomb, raționamentele care justifică aceste informații, model de ingeniozitate și model de rezolvare a unor probleme similare.

Să colorăm tabla de șah cu trei culori, *a*, *b* și *c*, așa cum indică figura 71. Există pe această tablă cîte 21 de pătrate colorate cu *a* și cu *c* și 22 de pătrate colorate cu *b*. Fiecare tromino I, indiferent dacă este așezat vertical sau orizontal, va acoperi un pătrat *a*, unul *b* și unul *c*. Cele 21 de trominouri vor acoperi deci 21 de pătrate *a*, 21 de pătrate *b* și tot 21 de pătrate *c*. Prin urmare, monominoul nu poate sta decît într-un pătrat de tip *b*. Să presupunem că îl așezăm în colțul din dreapta-sus. Dacă tabla poate fi acoperită în această situație, atunci ea poate fi acoperită și cu monominoul așezat în colțul din stînga-sus și, la fel, cu monominoul în colțul din dreapta-jos, deoarece, din motive de simetrie orizontală și verticală (dacă preferați, vă puteți imagina că priviți tabla în oglindă), soluția trebuie să se păstreze dacă „răsturnăm" tabla. Dar în colțurile din stînga-sus și dreapta-jos nu apare culoarea *b*, și am văzut că monominoul nu poate sta într-un pătrat colorat cu *a* sau cu *c*. Contradicție, deci monominoul nu poate sta în colțul din dreapta-sus. Mai general, monominoul trebuie așezat într-un pătrat *b* care este simetric, în raport cu orizontala și cu verticala centrului tablei, tot unor pătrate *b*. Există exact patru pătrate *b* legate printr-o asemenea relație de simetrie

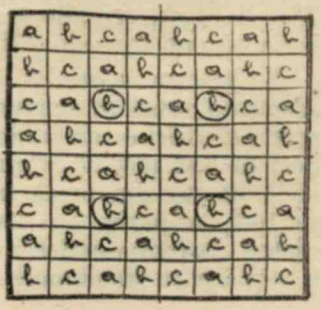

Fig. 71

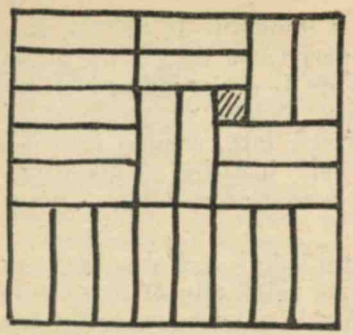

Fig. 72

în raport cu centrul tablei: cele patru litere *b* încercuite în figura 71. Că acoperirea este într-adevăr posibilă în aceste cazuri ne arată figura 72.

Cu 21 de trominouri în formă de L se poate acoperi tabla de şah indiferent unde se aşază monominoul. Demonstraţia se poate face prin *inducţie după dimensiunea tablei*. După cum am văzut şi în paragraful 4.7, un raţionament prin inducţie decurge astfel: din faptul că o anumită afirmaţie poate fi verificată efectiv pentru 1, 2, 3,... şi oricît de multe numere naturale şi din faptul că dacă afirmaţia respectivă este adevărată pentru un număr oarecare n, rezultă că ea este adevărată şi pentru $n + 1$, se trage concluzia că această afirmaţie este adevărată pentru orice număr.

În cazul nostru, afirmaţia este „oricare ar fi un număr n, $n \geqslant 1$, tabla de şah de dimensiuni $2^n \times 2^n$ poate fi acoperită folosind un monomino şi atîtea trominouri L cîte sînt necesare (sînt necesare $(2^n \cdot 2^n - 1)/3$ trominouri) şi, mai mult, monominoul poate fi aşezat oriunde". Să verificăm această afirmaţie pentru $n = 1$. Obţinem tabla din figura 73a. Evident, oriunde ar fi plasat monominoul, ceea ce rămîne este un tromino. Afirmaţia este adevărată în acest caz.

Să trecem la $n = 2$, deci la tabla 4×4. Împărţim o asemenea tablă în sferturi ca în figura 73b. Oricare dintre aceste sferturi poate fi identificat cu pătratul din figura 73a, deci în acel pătrat putem aşeza un tromino L şi monominoul, acesta din urmă în orice poziţie. Din celelalte trei sferturi, acoperim cu cîte un monomino pătratele dinspre centru. Revenim astfel la pasul $n = 1$: ceea ce rămîne poate fi acoperit cu trominouri. Cele trei monominouri de la centru

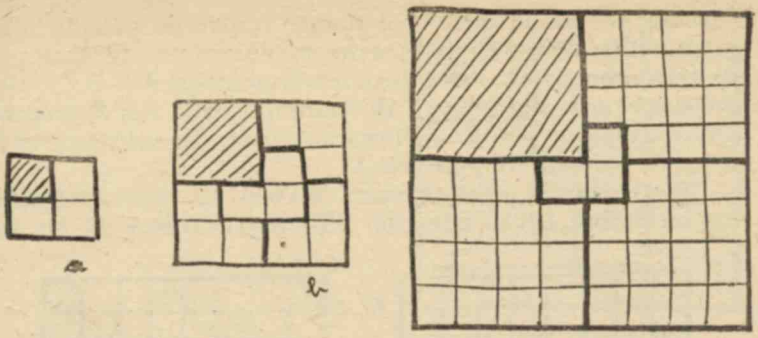

Fig. 73

formează însă un tromino; le înlocuim cu un tromino L și acoperirea este terminată. Și așa mai departe. Dacă presupunem că putem acoperi în condițiile anterioare orice tablă $2^n \times 2^n$, atunci și tabla $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ poate fi acoperită: tabla $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ este formată din patru table $2^n \times 2^n$. Rezolvăm problema pentru fiecare dintre acestea, cu singura grijă ca pentru trei dintre ele monominoul să fie așezat la mijloc (deci toate trei să poată fi înlocuite cu un tromino).

Tabla de șah este de dimensiuni $2^3 \times 2^3$, deci și ea poate fi acoperită cu trominouri L, plus un monomino plasat oriunde.

Să considerăm acum tetrominourile. Tabla de șah poate fi ușor acoperită cu cîte 16 piese de tip I, L, T sau O, deoarece și pătratul 4×4 (un sfert de tablă) poate fi acoperit cu asemenea tetrominouri. De asemenea, se vede ușor că nu putem acoperi tabla de șah cu tetrominouri S, deoarece nu le putem așeza convenabil la colțuri. Apar însă probleme foarte interesante atunci cînd încercăm să acoperim tabla cu 15 tetrominouri I, L, T sau S (toate de același tip) și un tetromino O. Problema are răspunsul negativ în fiecare dintre situații și justificarea acestei afirmații se obține tot prin colorarea adecvată a tablei și verificarea că paritatea numerelor de pătrate de o culoare sau alta nu este aceeași pentru tablă și pentru ansamblul tetrominourilor folosite. Las cititorului plăcerea de a concretiza acest raționament, precizînd aici doar (din articolul lui S. Golomb) că pentru piesa T putem folosi colorarea obișnuită a tablei de șah, pentru tetrominourile L folosim colorarea din figura 74a

(fiecare tetromino ocupă un număr impar de pătrate albe și un număr impar de pătrate negre, folosim un număr impar de tetrominouri etc.), iar pentru tetrominouri I și S se folosește colorarea din figura 74b (tetrominourile I și S acoperă numere pare de pătrate de fiecare culoare, dar tetrominoul O acoperă numere impare etc.).

Să trecem la pentaminouri. Există 12 piese distincte, neconsiderînd oglindirile (fig. 75). Este evident că ele nu

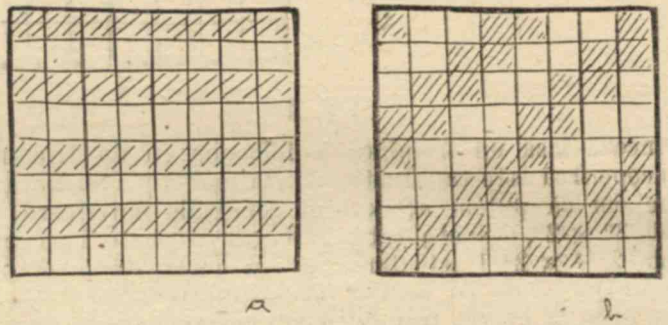

Fig. 74

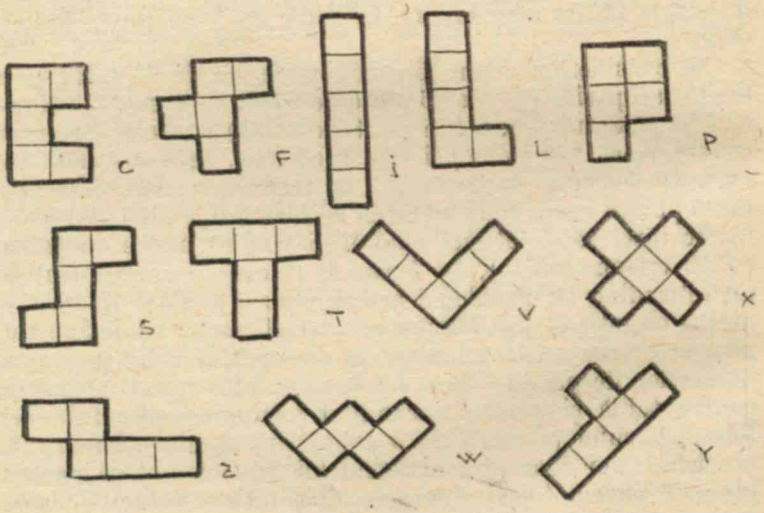

Fig. 75

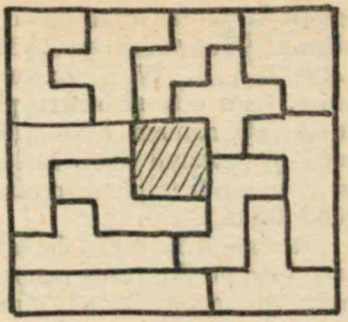

Fig. 76

pot acoperi complet tabla de șah (suprafața totală a pieselor este 60), dar o pot acoperi împreună cu un tetromino O (fig. 76). Mai mult, tetrominoul O poate fi așezat oriunde pe tablă (încercați sau căutați în cartea lui M. Gardner), ba chiar poate fi înlocuit cu patru monominouri așezate, de pildă, în colțurile tablei.

Părăsind însă tabla de șah, apar teribil de multe probleme noi. Suprafața totală a celor 12 piese pentamino (60) poate fi echivalată cu cea a unor dreptunghiuri 6×10, 5×12, 4×15, și 3×20. Pot fi aceste dreptunghiuri acoperite cu cele 12 piese? Răspunsul este afirmativ în fiecare caz în parte. (Dreptunghiul 6×10 poate fi realizat în 2 339 de moduri distincte; rezultatul a fost obținut pe calculator, în anul 1960. Tot pe calculator s-a demonstrat că dreptunghiul 3×20 are numai două soluții, iar dreptunghiul 5×12 poate fi realizat în 1 010 moduri diferite.) O altă problemă, și mai interesantă: problema „triplării". Alegeți o piesă și încercați să realizați o copie a ei de trei ori mai mare, utilizînd nouă dintre piesele rămase (suprafața figurii va fi de 45 de pătrate). Problema are soluție (chiar soluții multiple uneori: există 497 de soluții pentru piesa P — rezultatul a fost obținut cu ajutorul calculatorului de către Gh. Săvulescu) pentru toate cele 12 piese pentamino! O parte dintre aceste probleme sînt formulate și în broșura care însoțește jocul PENTAMINO; cititorul interesat poate găsi multe altele în cartea lui M. Gardner sau poate născoci altele noi, PENTAMINO ca și Tangramul „suportînd" oricîtă inventivitate din partea jucătorului. Exemplu: să se tripleze o piesă folosind nouă cópii ale ei înseși. Pentru care piese există

soluții și pentru care nu există? Cîte soluții există pentru piesa P? Răspunsul poate fi găsit ușor pentru piesele C, F, L, S, T, V, X, W, Y, Z: nu există nici o posibilitate de triplare. Ușor este și pentru piesa I: soluția este unică. Printr-un raționament enumerativ, plecînd de la piciorul literei P și epuizînd toate variantele, se poate vedea că această piesă poate fi triplată în cinci moduri diferite folosind nouă cópii ale ei înseși.

Revenind la tabla de șah, o problemă mai puțin discutată este posibilitatea acoperirii acesteia cu 12 piese pentamino de aceeași formă, plus un tetromino. Se poate vedea ușor că nu putem rezolva această problemă pentru pentaminouri C, F, S, T, X din cauza dificultăților apărute la colțurile tablei; putem însă acoperi tabla cu 12 pentaminouri L și un tetromino I sau O, sau cu 12 pentaminouri I și un tetromino O (fig. 77). Pentru toate celelalte cazuri, problema rămîne în seama cititorului.

Apar însă aici două întrebări în legătură cu acoperirea cu pentaminouri I: 1) Poate fi tetrominoul așezat și în altă parte? 2) Poate fi folosit și un alt tetromino?

Ambele întrebări au răspunsul negativ. Pentru a vedea acest lucru se poate folosi tot tehnica lui S. Golomb, a colorării adecvate a tablei. În acest scop să considerăm colorarea din figura 78, folosind deci cinci culori distincte, 1, 2, 3, 4, 5. Pe întreaga tablă există 12 pătrate colorate cu 1, 13 colorate cu 2, 14 colorate cu 3, 13 colorate cu 4 și 12 pătrate colorate cu 5. Pe de altă parte, oriunde am așeza un pentamino I pe tablă, orizontal sau vertical, el va acoperi exact cîte un pătrat de fiecare culoare. În total, cele 12 pentaminouri vor acoperi deci cîte 12 pătrate de fiecare culoare.

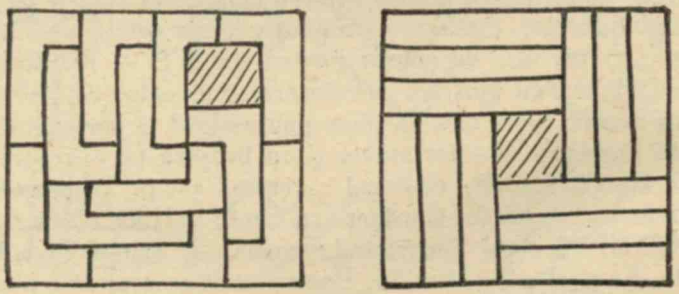

Fig. 77

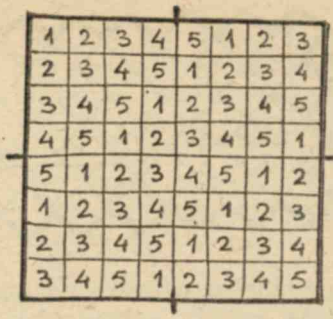

Fig. 78

În consecință, tetrominoul, indiferent ce formă va avea el, trebuie să acopere pătratele în exces, adică unul de culoarea 2, două de culoarea 3 și unul de culoarea 4.

Ce formă poate avea acest tetromino? Deoarece el conține două pătrate de tip 3, iar acestea nu se pot găsi decît pe diagonală, tetrominoul I este exclus. Tetrominoul S conține două perechi de pătrate colorate identic așezate în diagonală și paralele, deci nici el nu poate fi folosit (ar acoperi două pătrate 2 sau 4). Idem tetrominoul T care, lîngă două pătrate 3, va acoperi un pătrat 2 și unul 1, sau un pătrat 4 și unul 5. Rămîn să candideze tetrominourile L și O. Să presupunem că am realizat o acoperire oarecare a tablei, folosind una dintre aceste piese. Deoarece, rotind tabla sau privind-o în oglindă, acoperirea trebuie să se păstreze, rezultă că ea trebuie să fie în așa fel realizată încît tetrominoul să poată apărea și într-o poziție simetrică față de axele centrale, verticală și orizontală, ale tablei, precum și față de centrul tablei, pentru a realiza o acoperire nouă. Să procedăm sistematic, hașurînd pe tabla din figura 78 toate pătratele ocupate cu cifrele 1 sau 5, precum și toate pătratele simetrice unor asemenea pătrate. În final, singurul loc în care poate fi plasat un tetromino este centrul tablei, unde putem așeza tetrominoul pătrat (O). Aceasta este deci singura posibilitate de acoperire. Ceea ce trebuia demonstrat.

Cititorul este îndemnat să încerce raționamente similare pentru celelalte piese pentamino; desigur, i-aș fi îndatorat dacă mi-ar comunica și mie rezultatele la care a ajuns.

Probleme interesante (cerînd raționamente subtile pentru a demonstra nerezolvabilitatea lor) apar și în legătură cu acoperirea cu pentaminouri a altor suprafețe decît drept-

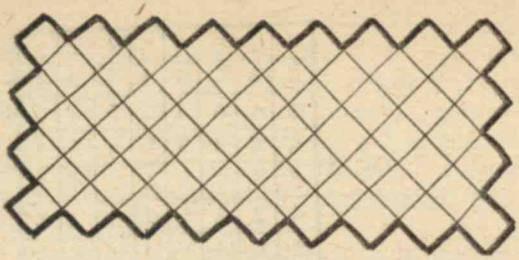

Fig. 79

unghiuri și pătrate. Un exemplu este cel din figura 79. De data aceasta, „cheia" demonstrației nu mai este colorarea tablei într-un mod care să conducă la rezultat, ci numărarea pătratelor de margine. În figură sînt 22 asemenea pătrate. Să evaluăm numărul maxim de pătrate de margine pe care poate să-l dea fiecare piesă pentamino. Obținem rezultatele din tabelul alăturat (dacă piesa I ar fi așezată astfel încît să dea două pătrate de margine, atunci ea ar închide un colț de 4 pătrate, care deci nu mai poate fi acoperit cu piese pentamino). În total, 21 de pătrate, mai puține deci decît numărul cerut de figura dorită.

piesa	C	F	I	L	P	S	T	V	X	Z	W	Y
nr. maxim pătrate margine	1	3	1	1	2	1	1	1	3	2	3	2

Jocul produs de către RECOOP ne propune însă, în afara acestor categorii de probleme, un interesant joc competitiv, de două persoane, care se desfășoară astfel. Fiecare jucător pune pe rînd cîte o piesă pe o tablă 8×8, ale cărei pătrate sînt marcate cu anumite punctaje. În afară de așezarea corectă, fără suprapuneri și exact pe pătratele corespunzătoare, singura restricție este ca orice piesă nouă să fie lipită cel puțin pe latura unui pătrat de piesele anterior introduse în joc. Jucătorul care nu mai poate așeza nici una dintre piesele sale — fiecare are cîte un set complet de piese pentamino — în spațiile rămase libere, pierde, iar adversarul cîștigă cu numărul de puncte rămase neacoperite. Se joacă mai multe „reprize", pînă la realizarea unui punctaj dinainte stabilit.

Cu un regulament similar, dar fără punctaje, jocul a fost imaginat de același S. Golomb (care are și o carte în domeniu, *Polyominoes*, apărută în anul 1965 la editura Scribner,

New York), care spune (după M. Gardner, op. cit.): „Jocul nu se poate termina nedecis, are mai multe deschideri posibile decît șahul și-i va pasiona pe jucătorii de toate vîrstele. Este greu să recomandăm strategia care trebuie urmată, dar există două principii valabile: 1. Încercați să faceți mutarea în așa fel încît să rămînă loc pentru un număr par de piese; 2) Dacă nu puteți analiza situația, faceți ceva ca să complicați poziția, astfel încît adversarul să aibă dificultăți de analiză mai mari ca dumneavoastră."

Un joc cu puncte (la care cîștigătorul realizează un anumit punctaj) este, desigur, mai complex și mai atractiv; din păcate, la pentamino, în cursul partidei nu se știe ale cui vor fi în final punctele neacoperite, de aceea, mutările sînt făcute pentru a cîștiga în sensul lui Golomb, nu pentru punctaj. Abia la ultimele cîteva mutări se poate eventual alege mutarea cea mai potrivită din acest punct de vedere.

Se pot însă imagina două jocuri înrudite, la care fiecare mutare trebuie aleasă în așa fel încît să contribuie cît mai avantajos la punctajul final.

O primă variantă este următoarea: la fiecare mutare se numără laturile de pătrate ale tablei pe care piesa jucată vine în contact cu piese aflate deja pe tablă, inclusiv cu marginile tablei. Cîștigă jucătorul care realizează punctajul maxim. În figura 80 este prezentată o partidă de acest gen, cîștigată de jucătorul cu albele, cu scorul 42—40; fiecare piesă este marcată cu un număr de la 1 la 12, reprezentînd mutarea, momentul introducerii în joc. Iată punctele aduse de fiecare mutare: 1 = 6 p, 2 = 6 p, 3 = 6 p, 4 = 6 p, 5 = 7 p, 6 = 7 p, 7 = 7 p, 8 = 7 p, 9 = 7 p, 10 = 7 p,

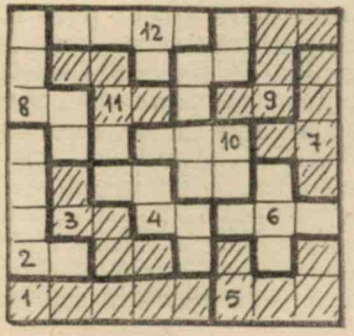

Fig. 80

11 = 7 p, 12 = 9 p. De remarcat (și de reținut) că dacă negrul ar fi jucat piesa 11 mai sus și mai la dreapta cu cîte o căsuță, atunci albul nu mai putea juca și, deși negrul nu cîștiga astfel decît 3 puncte, ele îi asigurau victoria. Pentru a elimina eventualele avantaje sau dezavantaje de acest gen, date de faptul că un jucător a fost primul, ar trebui jucate seturi de cîte două partide, alternînd la deschidere și cumulînd apoi punctajele.

O altă posibilitate de joc este de a merge pe ideea... cine face mai puține puncte, cu punctajele calculate tot ca mai înainte (laturi de pătrate comune cu piesele anterioare sau cu marginea tablei). Desigur, nu se mai consideră nici o restricție la plasarea pieselor (în afară de așezarea corectă, în interiorul tablei și fără suprapuneri). Primele mutări (nu mai mult de patru) se vor solda cu cîte zero puncte, dar apoi jocul se complică neașteptat de mult (în comparație cu varianta anterioară, de exemplu), deoarece zonele neacoperite ale tablei au o formă foarte neregulată și este greu de văzut care este mutarea cea mai bună într-o situație sau alta.

Din nou, ideea tactică generală este aceea de a determina cine face ultima mutare; de data aceasta trebuie însă forțat adversarul să fie ultimul, pentru a primi un număr suplimentar de puncte. De asemenea, o „întîlnire" ar trebui să constea tot din două partide de acest fel, fiecare jucător fiind o dată primul.

Jocurile anterioare de două persoane pun însă o serie de probleme interesante în sine și astfel revenim la ipostaza de joc de o persoană a pentaminoului.

Am spus mai devreme că cel mult patru piese pentamino pot fi plasate pe tablă în așa fel încît să nu se realizeze nici o alăturare a două piese între ele sau cu marginea tablei. Să justificăm acest lucru. Că patru piese pot fi așezate astfel rezultă din figura 81; există desigur și alte posibilități. Nu putem însă așeza cinci piese fără a realiza asemenea alăturări. Într-adevăr, aceste piese trebuie așezate în pătratul 6 × 6 de la mijlocul tablei (altfel se realizează puncte pe margine). Acest pătrat are 36 de căsuțe. După ce o piesă a fost așezată pe tablă, există un număr de pătrate vecine care trebuie să rămînă libere, altfel piesele se ating. Să numim *pătrate interzise* căsuțele de acest gen. Pătratele 1, 2, 3, 4, 5, 6 din figura 81 sînt interzise de piesa I. Să remarcăm

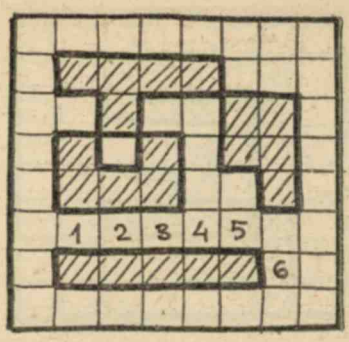

Fig. 81

însă că pătratele 1, 2, 3 sînt în același timp interzise și de piesa C. Putem spune că numai jumătate din fiecare pătrat 1, 2, 3 este interzis de piesa I. Să evaluăm pentru fiecare piesă în parte numărul minim de pătrate interzise aflate în interiorul pătratului central 6 × 6 al tablei. Tabelul următor indică aceste numere.

piesa	C	F	I	L	P	S	T	V	X	Z	W	Y
nr. minim pătrate interzise	5	6	6	5	4	7	6	5	6	6	5	5

Să presupunem că am așezat pe tablă cinci dintre cele mai economicoase piese, deci piesa P și încă patru piese care interzic fiecare cîte 5 pătrate. În total au fost interzise deci cel puțin 24/2 = 12 pătrate (unele sînt interzise de două ori, de către două piese). Din cele 36 de pătrate ale zonei centrale, 6 × 6, a tablei, mai rămîn deci disponibile pentru cele cinci piese, alte 24 de pătrate. Cele cinci piese pentamino totalizează însă 25 de pătrate. Ele nu au loc în spațiul rămas. Soluția nu există, cinci piese pentamino nu pot fi puse pe tablă fără să se atingă între ele sau cu marginea tablei.

În raționamentul anterior am presupus că se folosesc piese pentamino distincte. Chiar dacă folosim două seturi de piese, cîte unul pentru fiecare jucător, concluzia anterioară rămîne valabilă, deoarece, chiar folosind două piese P (cele care interzic cîte 4 pătrate) și trei piese care interzic cîte 5 pătrate, obținem un total de 23/2 = 11,5 pătrate interzise; împreună cu cele 25 de pătrate ale pieselor, iarăși obținem un total care depășește 36, suprafața pătratului 6 × 6.

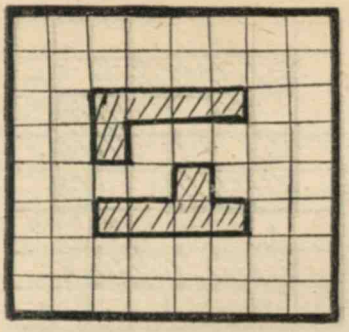

Fig. 82

Problema inversă — care este numărul minim de piese care fac ca piesa următoare să realizeze atingeri? — este foarte simplă: o singură piesă este, evident, prea puțin, iar două piese sînt deja suficiente (fig. 82). Dar (iată acum decurg problemele una din alta) cu oricare pereche de piese pentamino se poate realiza acest lucru? Există $12 \times 11 = 132$ de perechi distincte de piese, deci nu are rost să rezolvăm problema prin încercări. Pe de altă parte, nici nu există un raționament unitar pentru toate perechile, deoarece nici răspunsul nu este unitar: piesele X și F nu fac imposibilă adăugarea a încă unei piese (de tip L, P sau V), oricum le-am așeza pe tablă. Această afirmație ar trebui verificată. Într-adevăr, dacă piesa X atinge marginea, ea a realizat deja puncte; dacă nu atinge marginea, ea trebuie plasată în pătratul central 6×6. Din motive de simetrie, ne interesează numai patru posibilități de așezare a ei: 1) ca în fig. 83, 2) mai jos cu o linie, 3) mai la stînga cu o coloană, 4) mai la stînga cu o coloană și în același timp mai jos cu o linie. În toate aceste patru cazuri, oricum am așeza piesa F, tot mai rămîne loc pentru a așeza una din piesele L, P sau V.

În legătură cu jocul de două persoane al lui Golomb, o problemă interesantă este următoarea: Care este numărul minim de piese care pot fi așezate pe tablă astfel încît să nu mai rămînă loc pentru nici una dintre celelalte piese pentamino (de data aceasta, cu atingeri, bineînțeles). Răspunsul a fost dat tot de Golomb: cinci (fig. 84).

După pentaminouri urmează hexaminourile (sau hexo— ca să-l urmăm pe S. Golomb). Există 35 de piese care pot fi

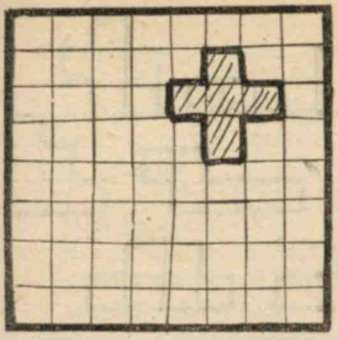

Fig. 83

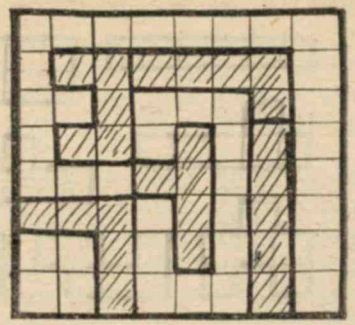

Fig. 84

formate cu cîte şase pătrate adiacente (fig. 85), un total deci de $35 \times 6 = 210$ pătrate. Problemă: putem aranja aceste hexaminouri astfel încît să formăm dreptunghiuri de suprafaţă egală cu 210? Cîte asemenea dreptunghiuri există? Deoarece

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

sînt posibile dreptunghiurile 2×105, 3×70, 5×42, 6×35, 7×30, 10×21 şi 14×15. Evident, primul nu poate fi realizat din hexaminouri, fiind prea îngust. Ceea ce este surprinzător este că *nici unul dintre celelalte dreptunghiuri nu poate fi realizat din hexaminouri* şi, de asemenea surprinzător, demonstraţia acestei afirmaţii atît de generale este foarte simplă. Ea a fost dată tot de către S. Golomb (dar nu în articolul citat); aici este reluată după M. Gardner *(Amuzamente matematice)*. Ideea este tot colorarea alternativă a pătratelor ca la tabla de şah. Fiecare dintre dreptunghiuri are una dintre laturi de lungime pară. Într-un şir de pătrate de lungime pară vor exista la fel de multe pătrate albe cîte negre. În total, fiecare dreptunghi de suprafaţă 210 va conţine deci numere egale de pătrate albe şi negre, deci cîte 105 din fiecare, 105 este un număr impar. Reţinem acest lucru.

Să examinăm acum hexaminourile. Oricum ar fi ele aşezate pe tablă, primele 24 vor acoperi fiecare cîte trei pătrate negre şi cîte trei albe. În total, aceste piese vor acoperi deci cîte $24 \times 3 = 72$ pătrate albe şi tot atîtea negre.

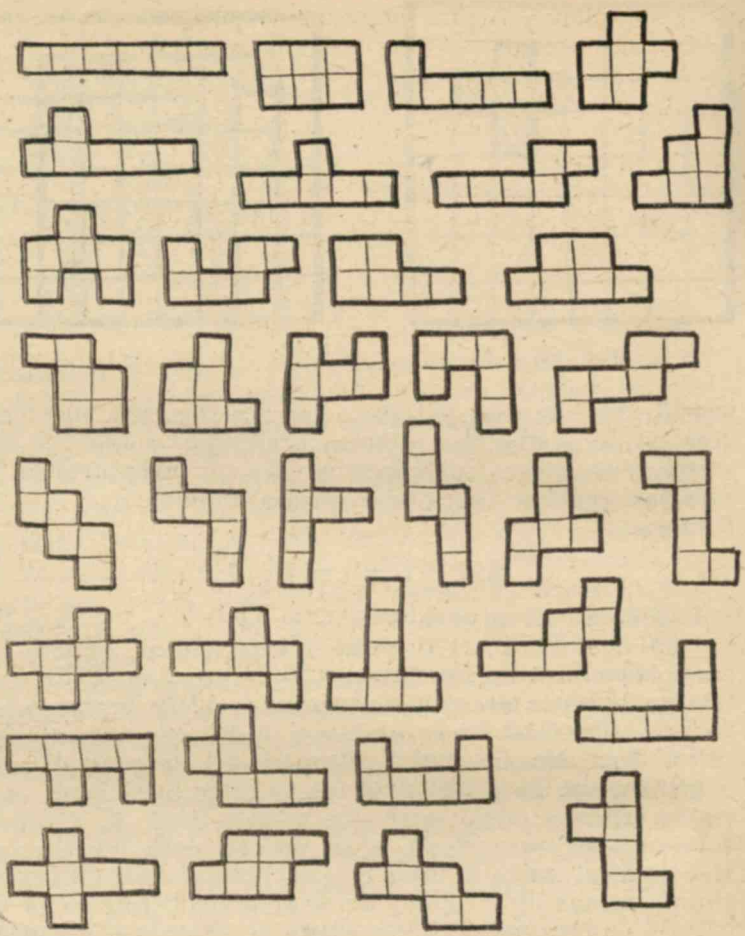

Fig. 85

Reținem doar că 72 este un număr par. Au mai rămas însă încă 11 hexaminouri. Acestea vor acoperi fiecare fie patru pătrate albe și două negre, fie două albe și patru negre. Numere pare de fiecare dată, deci cele 11 piese vor acoperi în total numere pare de pătrate albe și negre. Par plus par dă un rezultat par. Hexaminourile vor acoperi deci un număr par de pătrate albe și tot un număr par de pătrate negre.

Contradicție, fiecare dreptunghi conținea cîte 105 pătrate de fiecare culoare. Demonstrația este terminată.

De la șapte pătrate în sus lucrurile nu mai par interesante deoarece numărul pieselor formate este prea mare și, în plus, apar și piese circulare, care închid complet pătrate goale în interior.

Bineînțeles, au existat multe alte idei de generalizare. Una este aceea de a considera piese groase, spațiale, cum ar fi pentaminouri cu cuburi în loc de pătrate (un fel de piese SOMA deci). Alta este considerarea de table ...spațiale: să așezăm, de pildă, poliominouri flexibile pe suprafața unui tor (S. Golomb are în vedere probleme de acest gen). Nu voi discuta aici asemenea generalizări. Voi menționa doar ideea de a considera nu piese formate din pătrate, ci din alte figuri elementare. Triunghiurile se oferă primele, mai ales că există și posibilitatea unei terminologii interesante. Într-adevăr, privind „diamantul" din fig. 86, constatăm că el este format din două triunghiuri, ceea ce sugerează descompunerea *dia-mant* (în engleză sună ceva mai acceptabil, „dia-mond") și continuarea „trimant", „tetromant" etc. Interesante par a fi *hexamanturile*. Există 19 piese distincte (considerăm acum distincte și oglindirile) care pot fi formate cu cîte șase triunghiuri echilaterale (fig. 87). Cu ele pot fi realizate diferite construcții. Cea din fig. 88 este dată și în *Winning ways*... (unde se spune că există mai multe mii de variante posibile de așezare în acest contur). A se observa relativa simetrie a aranjării, precum și hexagonul din interior (cel format din cinci piese hexamant).

5.4. Cubul lui Rubik

La prima vedere, inofensiv ca orice virus: un cub de plastic, de cîțiva centimetri, secționat pe fiecare direcție în cîte trei „felii" astfel încît să se obțină 27 de cubușoare mai mici, dintre care numai 26 sînt vizibile. Fiecare față este colorată altfel decît celelalte și se poate roti în jurul axului ei central (fig. 89). Aici e tot chichirezul: rotind de cîteva ori la întîm-

Fig. 86

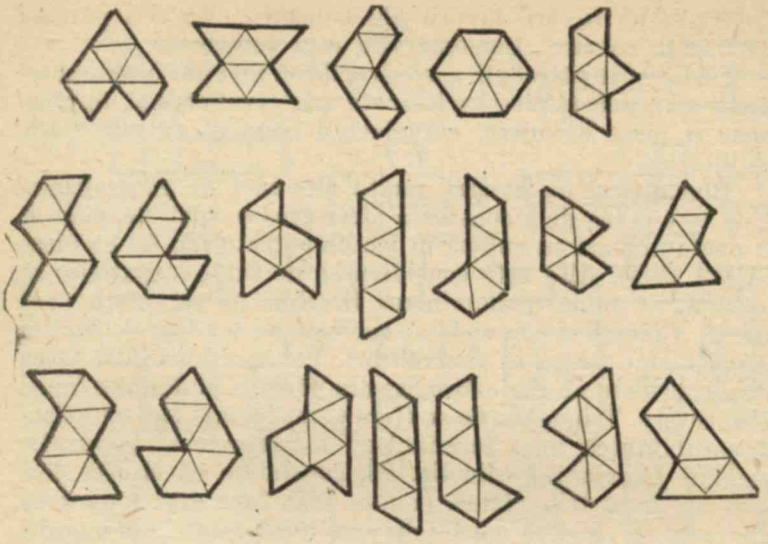

Fig. 87

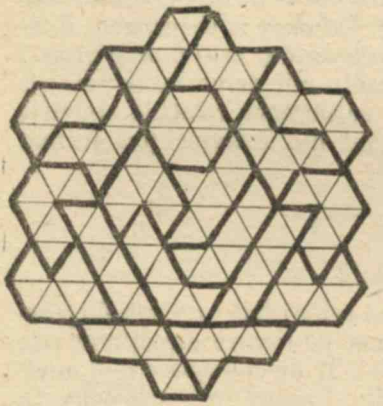

Fig. 88

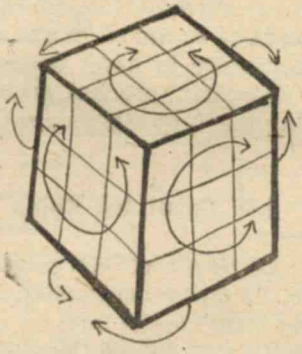

Fig. 89

plare feliile cubului, culorile „difuzează" rapid, pierzîndu-se într-un mozaic aparent incontrolabil în care numai cubușoarele din centrele fețelor mai amintesc de culoarea inițială. Cu orice mișcare în plus, mozaicul se uniformizează (în de-

zordine) și mai tare, pînă la un moment în care orice nouă rotire nu mai face nici rău, nici bine. Revenirea la ordinea inițială pare a fi o speranță irealizabilă și așa și este dacă ne bizuim numai pe hazard: există peste 43 de miliarde de miliarde de configurații posibile ale celor 26 de cubușoare (minus, de fapt, cele 6 centre ale fețelor) și exact una este cea inițială, cu fețele uniform colorate. Din fericire, există numeroase rețete sistematice pentru rezolvarea problemei (un asemenea algoritm va fi prezentat și mai jos).

Pînă aici, nimic foarte deosebit; jocuri logice am mai văzut, numerele mari nu mai sperie pe nimeni (vorba egiptenilor: tot ce trece de zece mii este infinit, așa că niște zerouri suplimentare nu ne impresionează în nici un fel...). Și totuși... Obiectul descris mai sus s-a dovedit un agent patogen irezistibil.

Epidemia a fost pregătită (involuntar, declară acum inițiatorul ei) în 1975, cînd un tînăr arhitect maghiar, Ernö Rubik, profesor la Școala de arte decorative din Budapesta, mare amator de șah, dar nu prea interesat în ale matematicii (spun unii jurnaliști, pentru savoarea contrastului), a brevetat o jucărioară multicoloră, menită să-i folosească drept material didactic pentru întărirea intuiției spațiale a studenților săi. În 1978, un amic al lui Rubik ia cubul cu el la Congresul internațional de matematică de la Helsinki și astfel „explozivul" ajunge pe mîna matematicienilor, acele personaje care, după cum afirmă Fontenelle, „sînt ca niște îndrăgostiți: ajunge să le cedezi o premisă că ei derivează imediat o consecință, care și ea trebuie cedată, apoi încă una și așa mai departe". Cubul a trecut din mînă în mînă, s-a făcut imediat legătura cu teoria grupurilor (de permutări), teorie care nu se putea deloc lăuda pînă atunci cu exemplificări multicolore ale noțiunilor cu care opera. Virusul s-a răspîndit cu repeziciune în Franța și Marea Britanie, a trecut apoi oceanul spre America și Japonia (unde în 1976 fusese brevetat un joc similar), a intrat, bineînțeles, în atenția unor coloși ai industriei și comerțului cu jucării, astfel încît, în 1980, grupul Ideal-Toy comanda Ungariei 6 milioane de cuburi, dedicate desfacerii în țările occidentale (*Science et Vie*, 753(1980), p. 135). Un număr comparabil de cuburi-pirat sînt probabil simultan în circulație. În 1981 puteau fi înregistrate peste 50 de articole dedicate fenomenului și obiectului împricinat și de atunci vor mai fi apărut desigur

şi altele, iar broşurile cu soluţii ale jocului s-au dovedit a fi o afacere extrem de rentabilă (*Notele asupra cubului magic al lui Rubik*, de David Singmaster, unul dintre maeştrii *cubologiei*, a fost reeditată deja de opt ori în Marea Britanie şi o dată în S.U.A.).

Apropo de *cubologie;* mai în glumă, mai în serios, se vorbeşte adesea şi despre inovaţiile lingvistice antrenate de invenţia lui Rubik. Cub-maestru, cubist, cubiclu, cubuleţ sînt numai cîteva dintre cuvintele noi, frecvent utilizate de „specialiştii" de profil.

Un psiho-sociolog ar putea face studii serioase asupra fenomenului. Pe ce se bazează puterea de extindere a „efectului Rubik", care sînt componentele atractivităţii acestui joc, realmente mare eveniment în istoria totuşi multimilenară a domeniului? Evident, nu acest subiect ne va interesa aici, ci voi trece la prezentarea cîtorva elemente matematico-logice legate de cub.

În primul rînd, să examinăm numărul tuturor configuraţiilor posibile pe cub. Deoarece centrele feţelor nu se mişcă (pot fi numai rotite), există doar 20 de cubuşoare care se deplasează: 8 colţuri şi 12 muchii (cubuşoarele de pe muchiile cubului). Acestea pot fi permutate în $8! \times 12!$ moduri*. Contează însă şi orientarea cubuşoarelor, deoarece colţurile au cîte trei feţe colorate diferit, iar muchiile cîte două. Fiecare colţ are deci trei orientări posibile, două colţuri vor avea 3^2 (pentru fiecare orientare a primului, cîte 3 orientări ale celui de-al doilea), trei colţuri vor avea 3^3 orientări şi aşa mai departe. În total, 3^8. La acestea se adaugă 2^{12} moduri distincte de a orienta cele 12 muchii. Numărul total al configuraţiilor este deci

$$N = 8! \times 12! \times 2^{12} \times 3^8 = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000.$$

Nu toate aceste configuraţii pot fi însă atinse prin rotirea feţelor, plecînd din starea iniţială a cubului, cea în care feţele sînt formate din cubuşoare de o singură culoare. Mai precis, numai a douăsprezecea parte a acestor configuraţii sînt realizabile, adică

$$43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.$$

* $n!$ se citeşte „n factorial" şi este o notaţie prescurtată pentru produsul $1.2.3...(n-1).n$.

Iată raționamentul care conduce la acest rezultat, raționament care ne va indica și ce fel de mișcări sînt necesare (și suficiente) pentru a restaura cubul. Această demonstrație, atribuită Annei Scott, a apărut în mai multe locuri. O reiau în forma prezentată de Douglas R. Hofstadter la rubrica sa „Metamagical Themas" (înlocuitoarea rubricii „Mathematical Games", a lui M. Gardner din *Scientific American;* atenție: cele două titluri de rubrică sînt unul anagrama celuilalt!), în articolul „The magic cube's cubies are twiddled by cubists and solved by cubemeisters" (nr. 244, martie, 1981).

Ideea constă în a face cîte un semn pe fiecare cubușor (mai puțin pe cele din centrele fețelor, care nu ne interesează) și de a căuta eventualele invariante ale modului de mișcare a acestor semne. Asemenea invariante pot fi foarte ușor depistate. Într-adevăr, să ne imaginăm că avem la îndemînă două cuburi; ignorăm culorile și marcăm identic cubușoarele acestora (de exemplu, fețele lor de sus, cele de jos și fețele din dreapta și din stînga ale cubușoarelor din felia de mijloc — vezi fig. 90). Păstrăm primul cub ca martor și rotim cîte o felie a celuilalt cub. Pentru fiecare rotație, analizăm situația semnelor pe cele două cuburi. De la început trebuie să remarcăm că trebuie să examinăm cubușoarele de colț separat de cele de pe mijloacele laturilor: piesele din cele două categorii nu-și schimbă niciodată tipul.

Să rotim cu 90°, în sensul mișcării acelor ceasornicului, felia din față a cubului 2 (fig. 91). Comparînd cu primul cub, observăm că nici un semn de pe piesele de pe mijlocul laturilor nu și-a schimbat locul (reamintesc faptul că nu distingem culorile). Semnele de pe cubușoarele de colț s-au mutat.

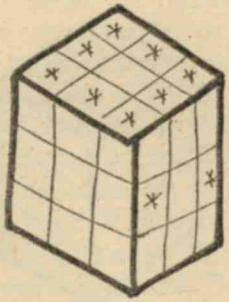

Fig. 90

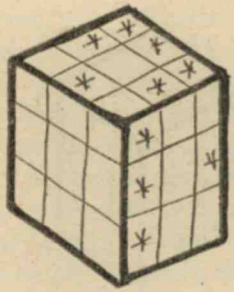

Fig. 91

Cum însă? Privim felia din față a cubului. Pentru a aduce semnele la locul lor, trebuie să rotim cu 120° în sensul acelor ceasornicului cubușoarele din dreapta-jos și stînga-sus și cu cîte 120° în sens invers acelor ceasornicului cubușoarele din dreapta-sus și stînga-jos. De două ori înainte, de două ori înapoi, în total *zero*.

Să facem o altă mișcare, să rotim felia de sus cu 90° în sensul acelor ceasornicului (fig. 92). Nu s-a schimbat nicăieri nimic: zero semne deplasate pe cubușoarele de mijloc și zero rotiri necesare pentru a aduce semnele pieselor de colț la locul lor.

În sfîrșit, să rotim în același fel și felia din dreapta (fig. 93). Exact patru semne de pe cubușoarele de mijloc sînt acum deplasate și din nou piesele de colț trebuie rotite, două într-un sens și două în celălalt, pentru a aduce semnele la locul lor.

Rotind și celelalte felii, vom obține rezultate similare; compunînd oricît de multe asemenea mișcări elementare, concluzia se păstrează. Totdeauna, *numărul semnelor de pe piesele de mijloc care nu coincid cu semnele de pe cubul martor este par, iar pentru a aduce la locul inițial semnele de pe piesele de colț este nevoie de un număr de rotiri cu 120° în sensul de mișcare al acelor ceasornicului egal cu numărul rotirilor necesare în sens invers.*

Să vedem cum putem folosi aceste afirmații. O primă învățătură: nu are rost să căutăm formule pentru reorientarea unui singur cubușor de pe mijlocul unei laturi și nici a oricărui număr impar de cubușoare. Deoarece numai cîte două cubușoare de mijloc pot fi reorientate, numărul *N*

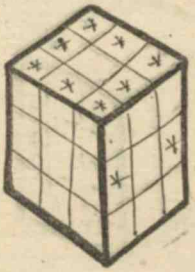

Fig. 92

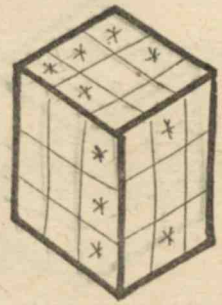

Fig. 93

anterior trebuie împărțit la 2 pentru a ne apropia de numărul configurațiilor accesibile din starea inițială.

Pe de altă parte, putem fi siguri că o formulă care schimbă orientarea a exact două cubușoare de pe mijloacele a două laturi vecine este suficientă pentru a orienta corect toate cubușoarele de pe mijloacele tuturor laturilor. Analog pentru colțuri: nu putem reorienta oricum colțurile, ci numai respectînd această restricție. Există însă formule „elementare", suficiente pentru orice reorientare. De exemplu, în „Almanahul Știință și Tehnică, 1983" (p. 123) se indică o formulă pentru a roti cu 120° în sensul acelor ceasornicului cubușoarele din dreapta-sus, dreapta-jos și stînga-jos ale feliei din față. Este posibil și suficient acest lucru? Bineînțeles. În primul rînd, formula respectă cerința dedusă mai înainte, deoarece o rotire „înapoi" poate fi echivalată cu două rotiri „înainte", și deci numărul total al rotirilor cu 120° în sensul acelor ceasornicului este multiplu de trei. Numărul N trebuie împărțit deci și la 3 (după ce l-am împărțit la 2). Concluzia practică este că suma rotirilor necesare la un moment dat este multiplu de trei. Colțurile feliei din față trebuie rotite deci de n_1, n_2, n_3, n_4 ori astfel încît (n_1, n_2, n_3, n_4) nu poate fi decît (1, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (2, 2, 2, 0), (2, 2, 1, 1) sau permutări ale acestor vectori. Toate aceste variante pot fi realizate prin cel mult trei repetări ale formulei amintite, deci însumînd (modulo 3, adică identificînd pe 3 cu 0) cel mult trei vectori (0, 1, 1, 1) sau permutări ale acestuia (permutările se obțin prin simpla rotire a cubului în mînă). De exemplu, $(1, 2, 2, 1) \equiv (0, 1, 1, 1) + (1, 1, 1, 0)$, iar $(1, 0, 2, 0) \equiv (0, 1, 1, 1) + (1, 1, 0, 1) + (0, 1, 1, 1)$.

Pînă acum am împărțit cu 6 numărul N, reducînd din numărul orientărilor. Și dintre permutările pieselor pot fi reduse jumătate, mai exact — la fel ca la jocul 14—15 al lui Sam Loyd — *numai permutările pare* pot fi obținute prin mișcări regulamentare. Pentru a demonstra acest lucru, să numerotăm cubușoarele într-o ordine oarecare (ca în fig. 94, de exemplu) și să evaluăm paritatea permutărilor elementare, cele obținute prin rotirea unei singure fețe a cubului. Inițial avem deci o permutare pară (zero inversiuni) a numerelor 1, 2,...,20. Rotind, de exemplu, fața din dreapta cu 90° în sensul acelor ceasornicului, obținem situația din

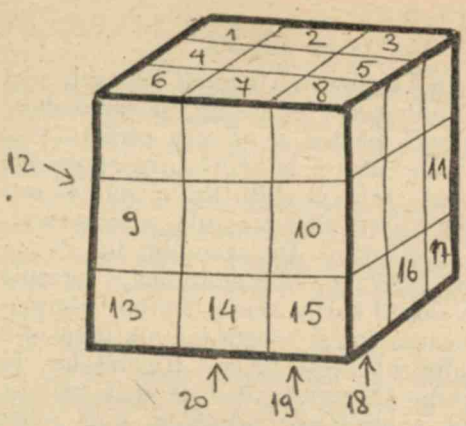

Fig. 94

fig. 95. Citind numerele înscrise pe cubușoare în ordinea din fig. 94, obținem astfel permutarea

1, 2, 8, 4, 10, 6, 7, 15, 9, 16, 5, 12, 13, 14, 17, 11, 3, 18, 19, 20

Apar în această permutare 40 de inversiuni, cele corespunzătoare perechilor:

(8, 4), (8, 6), (8, 7), (8, 5), (8, 3), (4, 3), (10, 6), (10,7), (10, 9), (10, 5), (10,3), (6,5), (6,3), (7, 5), (7, 3), (15, 9), (15,5), (15,12), (15,13), (15, 14), (15, 11), (15, 3), (9, 5), (9, 3), (16, 5), (16, 12), (16, 13), (16, 14), (16, 11), (16, 3), (5, 3), (12, 11), (12, 3), (13, 11), (13, 3), (14, 11), (14, 3), (17, 11), (17, 3), (11, 3).

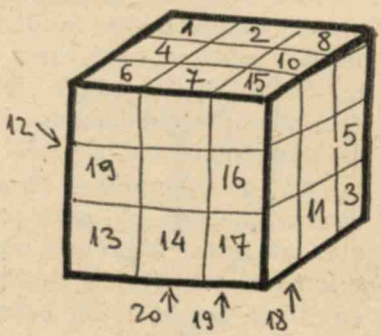

Fig. 95

Permutarea este pară. Rezultate similare pot fi obținute pentru toate celelalte 11 mișcări elementare. Dacă cititorul ține cu tot dinadinsul, poate să verifice această afirmație. Aici nu voi mai consemna decît o singură permutare, cea inversă celei anterioare. Se obține (plecînd din fig. 94, desigur) situația din fig. 96, cu permutarea asociată:

1, 2, 17, 4, 11, 6, 7, 3, 9, 5, 16, 12, 13, 14, 8, 10, 15, 18, 19, 20.

Ea conține următoarele inversiuni:

(17, 4), (17, 11), (17, 6), (17, 7), (17, 3), (17, 9), (17, 5), (17, 16), (17, 12), (17, 13), (17, 14), (17, 8), (17, 10), (17, 15), (4, 3), (11, 6), (11, 7), (11, 3), (11, 9), (11, 5), (11,8), (11, 10), (6, 3), (6, 5), (7, 3), (7, 5), (9, 5), (9, 8), (16, 12), (16, 13), (16, 14), (16, 8), (16, 10), (16, 15), (12, 8), (12, 10), (13, 8), (13, 10), (14, 8), (14, 10),

în total tot 40. Bineînțeles, nu toate mișcările conduc la 40 de inversiuni. De exemplu, rotind felia de sus a cubului se vor permuta numai numerele 1, 2, 3,...,8. În sensul acelor ceasornicului obținem astfel

6, 4, 1, 7, 2, 8, 5, 3, 9, 10, 11,...,20,

deci nu contează decît porțiunea inițială a permutării, adică

6, 4, 1, 7, 2, 8, 5, 3,

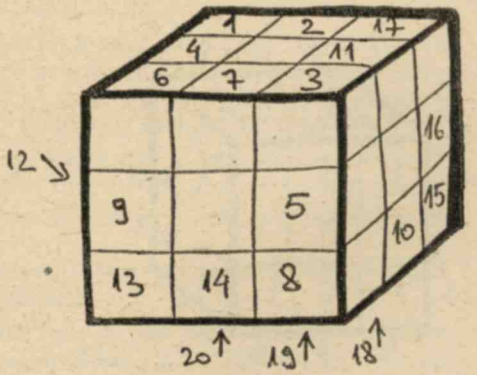

Fig. 96

în care apar 14 inversiuni:

(6, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 5), (6, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (7, 2), (7, 5), (7, 3), (8, 5), (8, 3), (5, 3).

Tot 14 inversiuni introduce și rotirea inversă a feliei de sus a cubului.

Spuneam mai devreme că în „Almanahul Știință și Tehnică, 1983" a fost prezentat un algoritm de restaurare a cubului (I. Budai și Gh. Păun). În cele ce urmează voi prelua însă din cartea *Winning ways...*, de atîtea ori citată în lucrarea de față, un algoritm ceva mai simplu, urmînd aceiași pași ca acela din „Almanah", dar realizîndu-i prin formule mai simple.

Să procedăm mai întîi la o codificare a fețelor și pieselor cubului, precum și a mișcărilor elementare posibile. Urmîndu-l pe „maestrul cubologiei", David Singmaster, voi folosi pentru aceasta literele corespunzînd denumirilor englezești ale fețelor, mai ales că această codificare este folosită deja în mod curent și în publicații de limbă ne-engleză. Fig. 97 prezintă această codificare. Cele șase fețe ale cubului au primit deci literele:

F — față *(Front)*
R — dreapta *(Right)*
L — stînga *(Left)*
U — deasupra *(Up)*
B — spate *(Back)*
D — jos *(Down)*

Să observăm că în felul acesta, fiecare piesă de colț este identificată prin trei litere *(FRU, URB, LUB, LUF, FDR,*

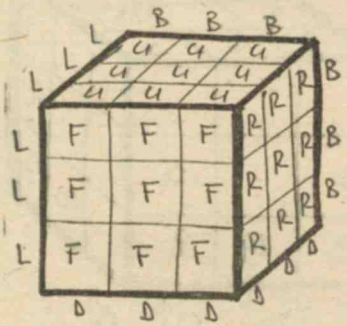

Fig. 97

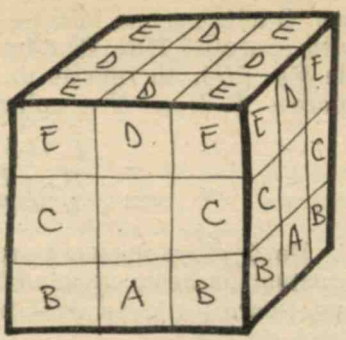

Fig. 98

RBD, *LBD*, *LFD)*, iar piesele de mijloc ale muchiilor prin cîte două litere *(FU*, *FR*, *FD*, *FL*, *BR*, *BU*, *BL*, *BD)*. Bineînțeles, vom folosi și permutări ale acestor „nume" *(FUR*, *URF*, *FRU* etc. identifică aceeași piesă).

Rotirea unei fețe X cu 90° în sensul acelor ceasornicului, privind cubul înspre acea față, se notează cu X, iar rotirea inversă cu X'. Obținem astfel 12 mișcări elementare:

$$F, F', R, R', L, L', U, U', B, B', D, D'.$$

Repetarea de n ori a unei operații π (o secvență de mișcări) se va scrie sub forma π^n, iar aplicarea *inversă*, de la dreapta spre stînga și înlocuind X cu X' și X' cu X se va nota cu π^{-1}.

Să trecem acum la restaurare. Procedura sintetizată de Berlekamp, Conway și Guy procedează în ordinea literelor A, B, C, D, E din fig. 98, adică de jos în sus (cubul nu-și schimbă poziția, ci numai orientarea, prin rotirea în jurul axei verticale), în următoareele etape:

A. *Restaurarea mijloacelor muchiilor de jos.* Operațiunea este foarte simplă și nu are nevoie de precizări prea detaliate. De exemplu, dacă dorim să aducem în poziția FD o piesă care se găsește în poziția FU, putem face fie F^2, fie $FRUR'F^2$, în funcție de orientarea ei. Dacă piesa nu este încă în felia de sus, ea va fi adusă acolo; din fața D se poate pleca cu F^2, iar din etajul de mijloc — din poziția FR, de exemplu — prin $RU'R'$.

Cu un minim de atenție și intuiție, cititorul poate realiza acest pas fără nici o indicație.

B. *Restaurarea colțurilor fetei de jos.* Ne ocupăm de poziția FRD și presupunem că piesa necesară se găsește în felia de

sus. O aducem mai întîi pe poziția *FUR*, prin rotirea potrivită a acestei felii. Căutăm pe această piesă culoarea feței de jos *(D)*. În funcție de poziția ocupată de această culoare — *F*, *R* sau *U* — aplicăm una din următoarele formule:

$$F \rightarrow F'U'F$$
$$R \rightarrow RUR'$$
$$U \rightarrow F'UFRU^2R'$$

Dacă piesa necesară se găsește deja în felia de jos, c scoatem de acolo aplicînd la întîmplare una din formulele anterioare pentru a duce în locul ei o piesă arbitrară din felia de sus.

Procedînd astfel, întreaga față de jos a cubului va fi restaurată.

C. *Restaurarea feliei de mijloc.* De fapt, numai cele patru piese de pe muchii se cer restaurate, centrele fețelor fiind deja la locul lor. Ne fixăm asupra poziției *FR* și căutăm piesa necesară în felia de sus. O aducem pe poziția *FU*. Dacă fața ei *F* are chiar culoarea feței *F* a cubului, atunci aplicăm

$$URU'R'U'F'UF$$

iar dacă culoarea feței *F* a cubului se găsește pe fața *U* a acestei piese, atunci aplicăm

$$U^2F'UFURU'R'$$

Din nou, dacă o piesă nu se găsește în fața *U*, ci în felia de mijloc, atunci o înlocuim cu o piesă oarecare, prin aplicarea uneia dintre formulele anterioare.

D. *Aducerea la locul lor a pieselor de mijloc din fața U.* Nu ne ocupăm deocamdată de orientarea acestor piese, ci numai de poziția lor. Acest lucru se poate realiza ușor, deoarece toate piesele necesare se găsesc deja în fața *U*, iar prin secvența de mutări

$$UFRUR'U'F'$$

putem permuta între ele piesele de pe pozițiile *FU* și *LU*. Rotind cubul în mînă, putem astfel aduce la locul lor toate piesele. Formula anterioară nu modifică primele două etaje ale cubului (dar, desigur, permută și unele dintre colțurile feței de sus, altfel permutarea ar fi impară, ceea ce am văzut că nu este posibil).

E. *Aducerea la locul lor a pieselor de colţ din faţa U.* Din nou, nu ne interesează în acest stadiu şi orientarea pieselor. Următoarea formulă

$$FDF^2D^2F^2D'F'$$

schimbă între ele colţurile *FLU* şi *FRU* şi, în acelaşi timp, strică o parte din realizările paşilor anteriori. Se vede însă imediat că formula anterioară este propria ei inversă. Aplicînd-o deci de două ori, se anulează modificările din etajele inferioare. Pe de altă parte, deoarece numai colţurile de sus au mai rămas de adus la locul lor, rezultă că permutarea lor este pară, deci nu pot fi numai două în altă parte decît ar trebui, ci trebuie realizate un număr par de transpoziţii între ele. Este exact ceea ce ne dorim: aplicăm formula anterioară pentru a schimba între ele piesele *FRU* şi *FLU*, apoi rotim *numai felia U* pentru a aduce pe poziţiile *FRU* şi *FLU* alte două colţuri pe care le dorim interschimbate. Aplicînd formula din nou, se realizează această schimbare şi în acelaşi timp se repară tot ceea ce a stricat prima aplicare a ei.

În felul acesta, toate piesele feţei *U* sînt aduse la locul lor.

F. *Orientarea corectă a colţurilor din faţa U.* Următoarele formule

$$(RF'R'F)^2$$
$$(F'RFR')^2$$

rotesc cu cîte 120° în sensul acelor ceasornicului şi, respectiv, în sensul invers acelor ceasornicului piesa de colţ din *FUR* şi, în acelaşi timp, strică din realizările paşilor anteriori. Deoarece aceste formule sînt însă una inversa celeilalte şi deoarece, aşa cum am văzut, numărul total de rotiri în sensul acelor ceasornicului este egal cu numărul de rotiri inverse, vom proceda din nou ca la etapa anterioară: aplicăm aceste formule pentru toate colţurile ce trebuie reorientate, aducîndu-le pe fiecare în colţul *FUR*, fără a roti cubul în mînă, ci numai felia *U*. În felul acesta, toate modificările în etajele inferioare se vor anula şi colţurile vor fi orientate corect.

G. *Orientarea corectă a mijloacelor feţei U.* Să considerăm acum şi o mutare specială: rotirea unei felii de mijloc a cubului. Există şase posibilităţi, cîte două pentru fiecare direcţie. Le notăm ca în fig. 99. Evident, fiecare dintre aceste mişcări

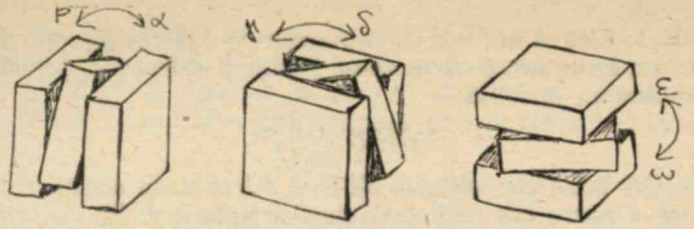

Fig. 99

poate fi redusă la rotirea potrivită a feţelor cubului (inclusiv a cubului), dar le vom folosi ca atare, deoarece pot fi realizate uşor şi sînt utile în scrierea compactă a unor formule (de exemplu, α este echivalentă cu LR', urmată de rotirea cu 90° a întregului cub în direcţia α).

Cu aceste notaţii, să considerăm formula

$$(\varepsilon R)^4$$

Ea reorientează piesa RU şi strică o parte din realizările paşilor anteriori. Deoarece şi această formulă este propria ei inversă, iar numărul pieselor neorientate corect este par, putem proceda ca la paşii anteriori: reorientăm piesa RU, apoi rotim felia U pentru a aduce o nouă piesă de reorientat pe poziţia RU (restul cubului rămîne nemişcat) şi aplicăm formula din nou. Ceea ce a fost stricat în etajele inferioare va fi astfel reparat.

Şi gata!

Faptul că acest algoritm funcţionează este garantat de consideraţiile anterioare privind paritatea permutărilor şi reorientările posibile. Atenţie: aceleaşi consideraţii ne arată că dacă demontăm cubul, sînt şanse 11/12 ca la remontare să obţinem o configuraţie care nu mai poate fi dusă niciodată în cea iniţială, de aceea este bine să remontăm cubul cu feţele colorate corect şi nu la întîmplare.

Algoritmul anterior nu intenţionează să fie economicos ca număr de mutări, ci uşor de explicat şi de reţinut. Este însă o problemă de mare interes găsirea celui mai scurt algoritm de restaurare a cubului, găsirea numărului minim de mutări prin care, din orice configuraţie, se poate ajunge în configuraţia iniţială. Deocamdată numai Ăldesus, vorba lui Ion Băieşu, cunoaşte un asemenea algoritm şi chiar aşa se numeşte în literatura cubului Rubik cel mai economicos

algoritm: algoritmul lui Dumnezeu. Deocamdată, cel mai mult s-a apropiat de acest algoritm Morwen B. Thistlesthwaite, coleg cu David Singmaster la Politehnica South Bank, Londra, și care, cu ajutorul calculatorului — nici nu se putea altfel — reușește să restaureze cubul în numai 52 de mutări (cu speranța că va reuși în curînd și în 50 de mutări, iar în viitorul ceva mai îndepărtat, chiar în 45). Din păcate, algoritmul lui Thistlesthwaite nu este un algoritm propriu-zis, ci o lungă listă de formule potrivite fiecare pentru a efectua trecerea de la anumite configurații la altele, fără cîștiguri vizibile la fiecare pas (ca în algoritmul anterior), dar care garantează obținerea în final a configurației inițiale.

O problemă înrudită cu căutarea algoritmului optim este estimarea numărului minim de mișcări necesare pentru a obține orice configurație a cubului. Deoarece la prima mișcare putem face 18 rotiri elementare (cele 12 asupra fețelor, plus cele șase asupra feliilor de mijloc), iar la următoarele numai cîte 15 care nu inversează mutarea anterioară (modulo rotirea cubului în mînă) și deoarece

$$18 \times 15^{15} = 7\ 882\ 090\ 026\ 855\ 468\ 750,$$

un număr mai mic decît

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000,$$

rezultă că cel puțin 17 mutări sînt necesare pentru a obține toate configurațiile. Această limită poate fi îmbunătățită la 18 prin considerații algebrice.

Între 18 (calculul anterior) și 52 (algoritmul lui Thistlesthwaite), iată limitele lungimii celui mai bun algoritm de restaurare a cubului.

Paralel cu căutarea unui algoritm rapid, are loc o cursă „mondială" pentru atingerea celui mai bun timp de restaurare. În 1982, recordul, realizat la un concurs internațional organizat la Budapesta, era de mai puțin de 23 de secunde! Apropo de timp: se spune că un magazin din Los Angeles a încercat să-și facă publicitate propunînd un premiu de 50 de dolari celor care reușesc să restaureze... o față a cubului în mai puțin de trei minute! Drept care magazinul a trebuit să plătească într-o zi 600 de dolari unor studenți pricepuți în ale cubologiei, care au avut inspirația să treacă pe acolo...

Am spus mai devreme că pe cubul lui Rubik pot fi ilustrate atractiv o serie de elemente algebrice, altfel aride, mai ales din teoria grupurilor: grup, subgrup, element invers, conjugat etc. Nu voi intra în amănunte aici; broșura lui David Singmaster prezintă multe asemenea elemente (folosite, de fapt, nu ca exemple pentru cei care studiază algebra, ci pentru că îi sînt utile în studierea cubului). Referiri la valoarea pedagogică a cubului au fost făcute și în alte locuri.

Rămînînd însă la cub ca jucărie, o mare răspîndire o au configurațiile decorative ale acestuia. Există numeroase asemenea configurații. Iată formule pentru cîteva dintre ele:

„Patru ferestre" — $\alpha\delta^2\beta\delta^2$
„Șase ferestre" — $\alpha\gamma\beta\delta$
„Șah" — $\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2$ (se mai numește și „Puntea măgarului")
„Arlechin" — $\alpha\gamma\beta\delta\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2$
„Dungatul" — $(L^2F^2R^2)^2FR'$
„Zigzag" — $(LRFB)^3$
„Patru plusuri" — $(\gamma^2L'\gamma^2R)^3$
„Șase plusuri" — $(\gamma^2L'\gamma^2R)^3(\alpha^2B'\alpha^2F)^3$
„Două X-uri" — $(F^2R^2B^2L^2)^3$
„Patru Z-uri" — $(FBRL)^3(UD)^2$
„Șase H-uri" — $D^2\alpha\delta^2\beta U^2$
„Șase U-uri" — $L'R^2F'L'B'UBLFRU'RL$
„Mugurele" — $RUF^2D'RL'FB'D'F'R'F^2RU^2FR^2F'R'U'F'U^2FR$
„Șarpele" — $BRL'D'R^2DR'LB'R^2UB^2U'DR^2D'$
„Mezon gigant" — $F'U'BU^2B'URU^2R'FBDF'D^2FD'L'D^2LB'$

și așa mai departe. Combinînd aceste configurații sau folosind formulele de la algoritmul anterior de restaurare, pot fi descoperite noi configurații decorative.

O ultimă remarcă asupra acestui cub. Cîte dintre cele 18 mișcări elementare sînt necesare pentru a scrie un algoritm de restaurare? În primul rînd, mutările $\alpha,\beta,\ldots$ pot fi eliminate așa cum am văzut, simulîndu-le cu mișcări ale fețelor și ale întregului cub. Pe de altă parte, există echivalența

$$D \equiv RL'F^2B^2RL'URLF^2B^2RL'$$

deci și mutarea D poate fi eliminată. Rotirea celorlalte cinci fețe este suficientă pentru a restaura cubul.

Cubul a declanșat o adevărată „furie" în materie de jocuri de permutare similare. În primul rînd, au fost realizate cuburi de dimensiuni $2\times2\times2$, $4\times4\times4$ și $5\times5\times5$. Evident, restaurarea cubului $2\times2\times2$ se poate face folosind formulele prin care se restaurează colțurile cubului obișnuit; pentru celelalte variante algoritmii de restaurare sînt proporționali cu dimensiunile. Numărul însuși al configurațiilor posibile pe aceste cuburi este impresionant: pe cubul $4\times4\times4$ pot fi realizate:
7 401 196 841 564 901 869 874 093 974 498 574 336 000 000 000 de aranjări diferite ale celor 56 de cubușoare exterioare. Patruzeci și șase de cifre. Pentru „Gigant" (așa este numit cubul $5\times5\times5$) sînt necesare 65 de cifre, pe care nu le maic onsemnez aici (oricum, un asemenea număr nu poate fi citit)...

Un algoritm pentru restaurarea cubului $4\times4\times4$ poate fi găsit în revista „Science et Vie", nr. 780, septembrie 1982, p. 118—123, unde sînt date și o serie de configurații decorative pe acest cub.

Detalii în domeniu pot fi găsite și în revista „RUBIK'S. Logic and fantasy dimensions", care apare în Ungaria, avînd ca redactor șef chiar pe Rubik.

O altă generalizare firească și rapid exploatată de fabricanții de jocuri a fost secționarea potrivită și a altor poliedre regulate: tetraedre, dodecaedre etc. De cele mai multe ori s-au obținut jocuri mai puțin interesante însă (mai greu de manevrat decît cubul, cu prea multe piese, mai puțin decorative etc.).

S-au secționat și poliedre neregulate. Unul dintre cele mai reușite este dominoul aceluiași Rubik.

5.5. Dominoul lui Rubik

Inventat de același extraordinar Ernö Rubik, „dominoul magic" este un fel de frate mai mic al celebrului cub multicolor; frate mai mic, dar nu mai puțin interesant.

Imaginați-vă nouă cubușoare negre și nouă albe, marcate de la 1 la 9 cu puncte ca piesele de domino și legate nu-știu-cum pentru a forma două etaje dintr-un cub (fig. 100). Orice felie poate fi rotită, cea de sus și cea de jos (în așezarea din fig. 100) cu 90° sau cu multipli de 90° (înainte și înapoi), iar cele laterale cu 180° sau cu multipli de 180°.

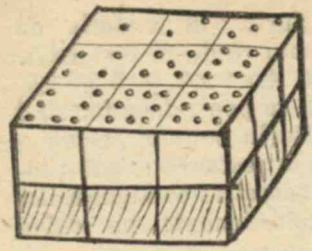

Fig. 100

Problema? Refacerea ordinii (de la 1 la 9) punctelor înscrise pe cubușoare, atît pe fața albă cît și pe cea neagră, după amestecarea arbitrară a acestor cubușoare.

Încercarea este mai ușoară decît în cazul cubului (există „numai" 406 125 600 de configurații posibile), dar oricum rămîne suficient de dificilă pentru a părea aproape imposibilă dacă nu este abordată sistematic. Mai ales că priceperea în rezolvarea cubului nu ajută aici decît la nivel strategic: faptul că feliile laterale nu pot fi rotite decît cu multipli de 180° face inaplicabile majoritatea formulelor cunoscute de la cub.

Pe de altă parte, un cub Rubik obișnuit poate fi folosit ca domino, deci dacă nu dispuneți de un domino autentic, nu este nici o problemă, vă puteți improviza unul astfel: marcați două fețe opuse ale cubului cu puncte ca de domino, ignorați culorile tuturor celorlalte fețe și impuneți-vă restricția ca atunci cînd rotiți o față laterală, rotirea să se facă cu 180°.

Voi prezenta în continuare un algoritm simplu pentru restaurarea dominoului. În formularea lui voi utiliza tot codificarea adoptată pentru cub, notînd deci cele șase fețe ca în fig. 101. Codificarea se referă la o poziție oarecare a domi-

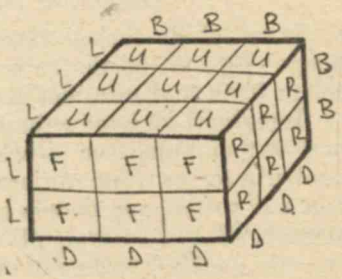

Fig. 101

noului, fără legătură cu culorile. Algoritmul va proceda în următoarele etape:

I. Separăm cubușoarele de colț (cele marcate cu 1, 3, 7 sau 9 puncte) albe de cele negre (centrele fețelor fiind fixe, ele precizează culoarea fețelor);

II. Punem cubușoarele de colț la locul lor, în cadrul fiecărei fețe (1 la nord-vest, 3 la nord-est etc.);

III. Ducem cubușoarele de mijloc la locul lor.

Pentru început, ținem dominoul „de-a latul", ca în fig. 101.

Primul obiectiv poate fi realizat folosind în mod potrivit formula

$$R^2DR^2.$$

Cu ajutorul ei, piesa din colțul *FLD* este adusă în etajul de deasupra, iar piesa din colțul *FUR* este adusă în etajul de jos (celelalte piese de colț rămîn în etajul în care se găseau) — vezi fig. 102. Dacă dorim deci să schimbăm o piesă albă de sus cu una neagră de jos, sau invers, le ducem mai întîi pe pozițiile *FLD*, respectiv, *FUR* și apoi aplicăm R^2DR^2. Atenție: cele două piese nu se schimbă între ele, ci își schimbă etajele.

Colțurile trebuie acum așezate la locul lor, în cadrul fiecărei fețe. Secvența de mutări

$$R^2F^2D'F^2DB^2D'B^2DB^2$$

schimbă între ele cubușoarele *FLU* și *FRU* (fig. 103), fără a modifica alte colțuri. Aplicînd de cel mult trei ori această formulă, putem duce la locul lor toate colțurile unei fețe. De pildă, pentru a schimba între ele două colțuri x

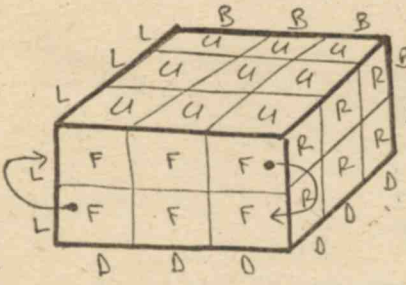

Fig. 102

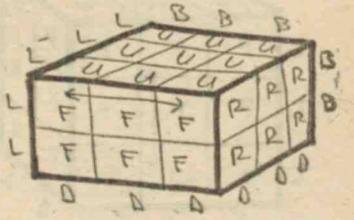

Fig. 103

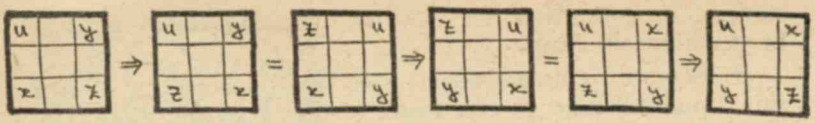

Fig. 104

și y situate pe diagonală, schimbăm mai întîi pe x cu un colț z intermediar, apoi pe x cu y și, în sfîrșit, pe z cu y (fig. 104).

Pentru a duce la locul lor și piesele de mijloc, folosim formula

$$(F^2R^2)^3$$

care, fără a face nici o altă modificare în dispunerea colțurilor sau a altor piese de mijloc, schimbă între ele cubușoarele FU și FD (fig. 105). Atenție: de data aceasta dominoul se așază „într-o dungă", ca în fig. 105. Aplicînd în mod potrivit această formulă, putem schimba între ele oricare două piese de mijloc, aducîndu-le una cîte una la locul lor. De exemplu, dacă dorim să permutăm piesele FD și FR, ducem mai întîi pe FR în poziția FU (prin R^2BU^2), aplicăm formula $(F^2R^2)^3$ și apoi refacem ceea ce am stricat la început aplicînd R^2BU^2, adică efectuăm mutările $U^2B'R^2$ (inversa acelei formule). La fel, dacă dorim să schimbăm între ele piesele FD și DB, ducem piesa DB în poziția FU (prin B^2U^2), aplicăm $(F^2R^2)^3$, apoi refacem dominoul cu U^2B^2.

Prin urmare, trei formule (simple), puțină răbdare, puțină intuiție spațială și restaurarea este terminată.

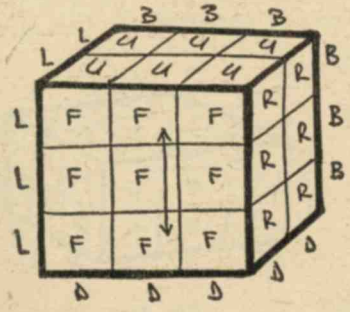

Fig. 105

5.6. Sfera lui Varga

Iată acum și o invenție românească în domeniul jocurilor de permutare, una care poate sta alături de jocurile anterioare fără să pălească. Dificil de rezolvat, foarte decorativă, simplă constructiv, agreabilă la manevrare, fiabilă. Este vorba de *sfera lui Varga*, creația inginerului Ladislau Varga, din Deva, de curînd răsplătită de OSIM cu un brevet de invenție și preluată de CENTROCOOP-RECOOP pentru a fi lansată pe piață.

Nu ne interesează aici detaliile constructive (simple, cum spuneam). Ceea ce se vede din afară este o sferă de cîțiva centimetri diametru, în care sînt practicate patru tăieturi aparente, delimitînd pe sferă tot atîtea cercuri egale. Fiecare cerc le intersectează pe toate celelalte trei, astfel încît suprafața delimitată de el se împarte într-un „triunghi" și trei „lentile", pe laturile acestuia (fig. 106). În total, avem deci patru triunghiuri și șase „lentile". La fiecare punct de întîlnire a trei cercuri, capetele respective ale „lentilelor", precum și vîrfurile triunghiurilor care ating acel punct sînt marcate cu o culoare distinctă de culorile folosite în celelalte puncte. Aceeași culoare se găsește înscrisă și în centrul triunghiului opus punctului respectiv.

Fiecare dintre cele patru cercuri (feliile din sferă delimitate de ele) se poate roti în ambele sensuri în jurul centrului. În acest fel, „lentilele" își schimbă locul pe sferă și, din cîteva mutări, la fel ca în cazul cubului și al dominoului, concordanța culorilor în cele patru puncte de întîlnire a triunghiurilor este distrusă. Orice mișcare în plus, orice încercare

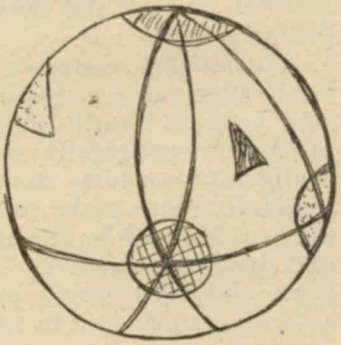

Fig. 106

nesistematică de reconstituire a ordinii inițiale complică și mai mult lucrurile. Problema constă deci în restaurarea sferei, în readucerea ei la starea de la început și, vă asigur, sarcina nu este deloc simplă.

Un algoritm (bazat pe formule nu tocmai complicate) pentru restaurarea sferei lui Varga va fi prezentat peste cîteva pagini. Înainte de căutarea unui asemenea algoritm trebuie însă întreprinse cîteva investigații privind configurațiile posibile pe sferă, pentru a vedea ce transformări sînt posibile (necesare) în vederea restaurării.

Mai întîi, o observație preliminară. Configurația inițială a sferei este bine determinată și aceasta chiar dacă centrele triunghiurilor n-ar fi colorate (cu culoarea punctului opus de întîlnire a cercurilor). Într-adevăr, triunghiurile nu-și părăsesc locul (ele se rotesc doar). Oricare două triunghiuri au cîte două vîrfuri colorate identic și aceste două perechi de vîrfuri trebuie să se întîlnească în final. În acest fel, orientarea fiecărui triunghi este bine stabilită, deci și locul „lentilelor" este bine stabilit.

Să încercăm să numărăm configurațiile posibile pe sferă. Ele provin din: 1) permutarea „lentilelor", 2) schimbarea orientării acestora (într-o aceeași poziție, o „lentilă" se poate găsi orientată în două moduri"), 3) schimbarea orientării triunghiurilor.

Șase obiecte pot fi permutate în $6! = 720$ de moduri. Cum fiecare „lentilă" poate fi orientată în două feluri, numărul anterior trebuie înmulțit cu $2^6 = 64$. Există deci 46 080 posibilități de aranjare a celor șase piese. Pentru fiecare asemenea variantă trebuie să considerăm însă cele $3^4 = 81$ de posibilități de orientare diferită a celor patru triunghiuri. În total, pe sferă sînt deci posibile 3 732 480 de configurații distincte.

O mențiune: aceste configurații sînt „posibile" prin demontarea sferei și remontarea ei în așa fel încît triunghiurile să-și păstreze locurile. Atunci cînd rotim însă feliile sferei, plecînd din configurația inițială, nu putem obține toate aceste configurații, nu toate sînt accesibile fără demontare. Numai jumătate dintre permutările „lentilelor" și numai jumătate dintre orientările lor sînt accesibile astfel, deci numărul anterior trebuie împărțit la 4. Pe sfera lui Varga pot fi deci obținute (fără demontarea jocului) numai 933 120 de configurații. Un număr mic în comparație cu cel al configurațiilor

accesibile pe cubul lui Rubik, dar, oricum, prohibitiv dacă încercăm să revenim la poziția inițială prin încercări, mizînd pe șansă.

Să justificăm afirmațiile anterioare. Pentru prima („numai jumătate din permutări sînt accesibile") vom folosi din nou noțiunile simple din algebra grupurilor de permutări folosite și pentru cub și pentru jocul 14—15. Pentru a ușura reprezentările, să reținem numai „scheletul" logic al sferei, cele patru puncte de intersecție a cercurilor. Ele se găsesc în vîrfurile unui tetraedru regulat; laturile acestuia corespund „lentilelor" sferei, iar fețele laterale și baza corespund triunghiurilor de pe sferă. Să așezăm sfera astfel încît acest tetraedru să arate ca în fig. 107 (punctul D se găsește în spate). Vom nota cele patru triunghiuri (cercuri de pe sferă) astfel: $ABC - F$ (față), $ABD - S$ (stînga), $ADC - D$ (dreapta), $BCD - J$ (jos). Rotirea cu 120° a unui cerc al sferei în sensul acelor ceasornicului (privind sfera dinspre exterior spre acel cerc) se notează cu litera corespunzătoare cercului respectiv. Avem deci mișcările elementare F, D, S, J. Rotirea cu 120° în sens invers acelor ceasornicului se va nota cu F', D', S', J', respectiv. Orice permutare accesibilă a „lentilelor" (a laturilor tetraedrului din fig. 107) se obține deci prin compunerea repetată a unora dintre cele opt permutări elementare F, F', D, D', S, S', J, J'.

Să numerotăm laturile tetraedrului, pentru a examina paritatea acestor permutări (fig. 108). Obținem următoarele rezultate:

inițial — 1 2 3 4 5 6 (0 inversiuni)
F — 4 2 1 3 5 6 (4 inversiuni)

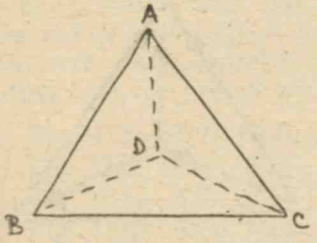

Fig. 107

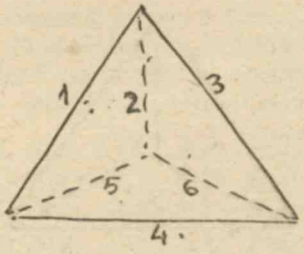

Fig. 108

F' — 3 2 4 1 5 6 (4 inversiuni)
D — 1 3 6 4 5 2 (6 inversiuni)
D' — 1 6 2 4 5 3 (6 inversiuni)
S — 2 5 3 4 1 6 (6 inversiuni)
S' — 5 1 3 4 2 6 (6 inversiuni)
J — 1 2 3 5 6 4 (2 inversiuni)
J' — 1 2 3 6 4 5 (2 inversiuni)

Prin urmare, toate aceste permutări elementare sînt pare, deci orice configurație a sferei obținută prin combinarea lor corespunde unei permutări pare. Ceea ce trebuia demonstrat.

Să ne referim acum la orientarea „lentilelor" (laturilor tetraedrului). Pentru a distinge între capetele acestor „lentile" (fără a face apel la culori), vom urma tot ideea folosită în cazul cubului lui Rubik și anume, în configurația inițială vom marca un capăt al fiecărei „lentile", considerînd marcat și locul respectiv. Orice astfel de marcare este bună; o vom alege pe cea din fig. 109, unde punctele reprezintă marcajele în configurația de plecare. Într-o configurație oarecare, vom numi *discordanță* orice latură pentru care marcajul locului nu este ocupat de marcajul „lentilei" aflate acolo. Inițial avem deci zero discordanțe. După ce aplicăm, de exemplu, mișcarea F, ajungem la situația din fig. 110 (în care am reprezentat punctat marcajele locurilor); au fost introduse două discordanțe. Același rezultat este dat de F' Din simetria figurii, rezultă că și D, D', S, S' introduc, de asemenea, cîte două discordanțe. În schimb, J, J' nu introduc nici o discordanță.

De la zero discordanțe inițial se poate deci trece la zero sau la două discordanțe. Unde pot fi plasate acestea? Din considerente de simetrie, ne interesează numai situațiile din fig. 111 a-e și anume: două laturi din vîrf; o latură din vîrf

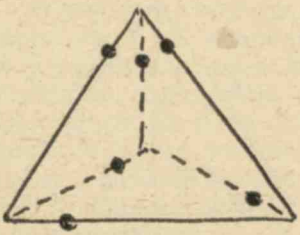

Fig. 109

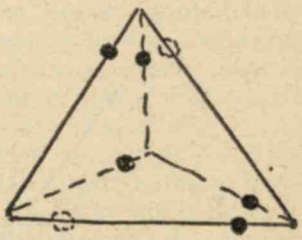

Fig. 110

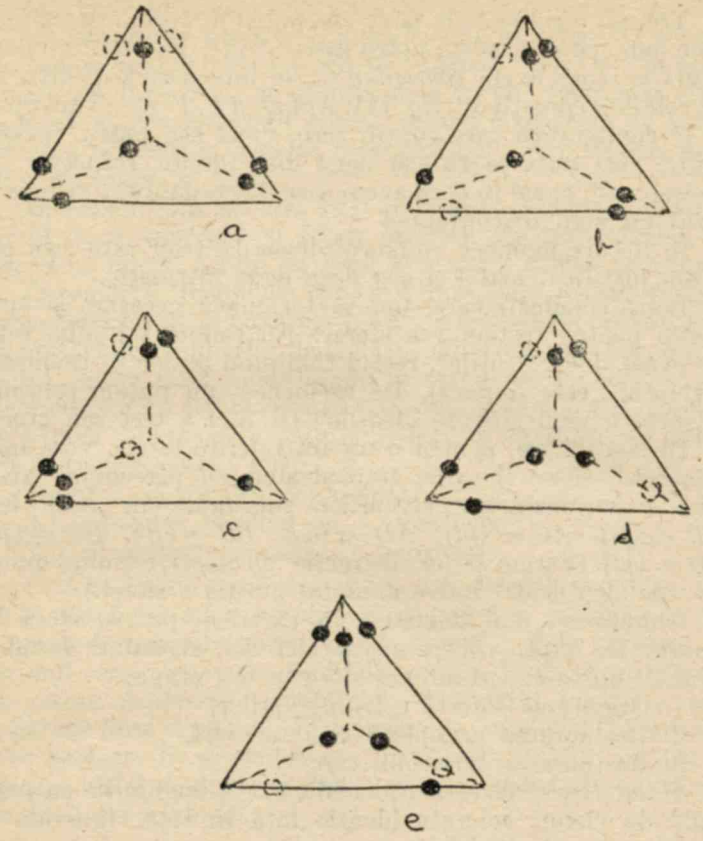

Fig. 111

și una vecină; idem, dar vecină în cealaltă parte; o latură din vîrf și latura opusă de la bază; două laturi de la bază. Numărul discordanțelor obținute după aplicarea fiecăreia dintre cele opt permutări elementare este (între paranteze):

Fig. 111a : $F(0), F'(2), D(2), D'(4), S(2), S'(2), J(2), J'(2)$
Fig. 111b : $F(2), F'(2), D(4), D'(4), S(2), S'(2), J(2), J'(2)$
Fig. 111c : $F(2), F'(4), D(4), D'(4), S(2), S'(0), J(2), J'(2)$
Fig. 111d : $F(2), F'(4), D(4), D'(2), S(2), S'(2), J(2), J'(2)$
Fig. 111e : $F(4), F'(2), D(4), D'(2), S(4), S'(4), J(2), J'(2)$

Trecem deci la zero, două sau patru discordanțe. Să presupunem acum să avem patru discordanțe. Există deci două laturi pe care avem *concordanțe*. Ne interesează pentru ele tot cele cinci poziții din fig. 111. Aplicînd F, F' etc., vom ajunge la configurații care conțin zero, două sau patru concordanțe, deci șase, patru sau două discordanțe, respectiv. În același mod, cazul în care avem șase discordanțe se reduce la cazul cu zero discordanțe.!

În fiecare moment, numărul discordanțelor este deci par și am justificat astfel și cea de a doua afirmație.

Două concluzii care anunță formulele necesare și suficiente pentru restaurarea sferei: Nu putem schimba între ele exact două „lentile", restul rămînînd pe loc (o asemenea permutare este impară). De asemenea, nu putem schimba orientarea unei singure „lentile" (și nici a trei sau cinci).

În continuare, pentru o ușoară referire la ele, vom nota „lentilele" sferei (laturile tetraedrului) cu perechi de litere mici corespunzătoare cercurilor suprapuse în acel loc: $AB = (fs)$, $AC = (fd)$, $AD = (ds)$, $BC = (jf)$, $BD = (js)$, $CD = (jd)$. (Facem astfel abstracție de culori, reținînd numai locurile „lentilelor" într-o anumită poziție a sferei.)

Anunțasem mai devreme *un* algoritm pentru sfera lui Varga. De fapt, voi prezenta aici *doi* algoritmi înrudiți. Primul dintre ei restaurează sfera în trei etape:

1. Orientarea corectă a triunghiurilor,
2. Restaurarea completă a unui vîrf,
3. Restaurarea ultimului cerc.

Pasul 1 se realizează ușor, aducînd triunghiurile cu perechile de vîrfuri colorate identic față în față. Ignorăm în acest stadiu „lentilele".

Pasul 2. Ne fixăm asupra unui vîrf și orientăm sfera cu acel vîrf în sus (în punctul A din fig. 107). În tot cursul algoritmului, vîrful respectiv va rămîne în acest loc, sfera rotindu-se doar în jurul unui ax ce trece prin punctul ales.

Trebuie să aducem cele trei „lentile" corespunzătoare la locul lor. Le vom aduce orientate corect, procedînd astfel. Ne fixăm asupra poziției *(fd)*. Identificăm piesa necesară pe sferă; să presupunem că ea se găsește în cercul de jos. Rotim acest cerc astfel încît piesa respectivă să ajungă pe poziția *(jf)*. Ne interesează culoarea din vîrf. Dacă această culoare marchează capătul dinspre stînga (din *B)* al piesei, atunci aplicăm $D'JDJ'$. Atunci cînd culoarea din vîrf mar-

chează capătul dinspre dreapta al piesei, aplicăm $JFJ'F'$. În ambele cazuri, piesa va ajunge la locul ei, orientată corect. Procedăm analog cu toate cele trei „lentile" din vîrf, cu mențiunea că dacă piesa se găsește deja în vîrf (eventual chiar la locul ei, dar orientată greșit), atunci o scoatem de acolo, aducînd în locul ei o piesă oarecare din cercul de jos, aplicînd, de pildă, $D'JDJ'$.

În felul acesta, un vîrf va fi restaurat. De fapt, o dată cu vîrful se restaurează și fețele laterale ale tetraedrului, în sensul că numai cercul de bază al sferei a rămas nearanjat.

O remarcă: formulele care vor fi utilizate pentru restaurarea cercului de la bază vor folosi de mai multe ori secvențe de mutări de genul celor de la pasul anterior, care vor reface vîrful, astfel încît modificările în cercul de la bază să fie efectuate fără a strica ceea ce s-a realizat deja la vîrf. Înainte de a trece mai departe, este bine deci să exersăm de cîteva ori restaurarea unui vîrf.

Pasul 3 constă din doi subpași:

3.1. aducerea la locul lor a „lentilelor",

3.2. orientarea corectă a „lentilelor".

Prin restaurarea unui vîrf au fost aduse la locul lor trei piese. Conform celor spuse mai sus, fără a demonta sfera, nu putem permuta exact două „lentile". Prin urmare, pe ultimul cerc, sau toate „lentilele" sînt la locul lor, sau toate se găsesc deplasate (bineînțeles, triunghiul respectiv este presupus bine orientat). În primul caz, subpasul 3.1 nu mai este necesar. În al doilea caz, cele trei „lentile" nu pot fi plasate altfel decît permutate circular. Aplicînd o dată sau de două ori formula

$$FDF'S'D'SJ'D'JDSJS'JS'JSJ'F'JF$$

cele trei piese vor fi aduse la locul lor (nu neapărat orientate). Într-adevăr, această secvență de mișcări duce (js) în (jd), (jd) în (jf) și (jf) în (js).

De remarcat, la aplicare, că primele șase mișcări strică, iar, celelalte repară vîrful restaurat la pasul 2.

Pentru a memora mai ușor această formulă, o putem scrie sub forma următoare, folosind faptul că $XX = X'$:

$$\underbrace{FDF'S'D'S}_{\text{I}}\ \underbrace{J'D'JD}_{\text{II}}\ (SJS)^3\ \underbrace{J'F'JF}_{\text{III}}$$

Porțiunea I a formulei trebuie reținută ca atare, II și III sînt foarte asemănătoare, iar *SJS* se repetă de trei ori.

Trebuie acum să și orientăm „lentilele" de la bază. Conform celor discutate mai devreme, numai un număr par de „lentile" pot fi orientate incorect; zero sau două „lentile" din bază au deci nevoie de reorientare. În primul caz, restaurarea este terminată. În cel de-al doilea caz, aducem „lentilele" respective pe pozițiile *(jf)* și *(js)*, prin rotirea sferei în mînă, și aplicăm formula:

FDSF'D'J'S'D'JDJS'JSJ.

În felul acesta, cele două piese vor fi reorientate și restaurarea este încheiată.

Și această formulă mai întîi strică și apoi repară tot ceea ce s-a obținut mai înainte. Să observăm că ea este mai scurtă decît cea de la subpasul 3.1, deși are de reparat mai mult decît aceasta.

Și al doilea algoritm de restaurare procedează tot în trei pași:

1. Orientarea corectă a triunghiurilor;
2. Aducerea la locul lor a „lentilelor" (fără orientare);
3. Orientarea „lentilelor".

Pasul 1 este identic cu cel de la primul algoritm. *Pasul 2* comportă doi subpași:

2.1. aducerea la locul lor a „lentilelor" de pe un cerc,
2.2. aducerea la locul lor a celorlalte trei „lentile".

Pentru primele două „lentile" de la subpasul 2.1 folosim operațiile de la pasul 2 al primului algoritm; rezolvăm astfel pozițiile *(fs)* și *(fd)*. Rotim apoi sfera în mînă astfel încît aceste două piese să ajungă în *(jf)* și *(fs)*, respectiv; mai avem de adus la locul ei piesa din *(fd)*. O căutăm pe sferă. Dacă ea se găsește în *(jd)*, aplicăm *J'D'JD*, dacă se găsește în *(ds)*, aplicăm *SDS'D'*, iar dacă se găsește în *(js)*, atunci folosim *D'J'DJ*.

Cercul din față are acum toate piesele la locul lor. Întoarcem sfera astfel încît acest cerc să ajungă jos; subpasul 2.2 va aduce la locul lor cele trei piese care se întîlnesc în vîrf, *(fs)*, *(fd)* și *(ds)* folosind o dată sau de două ori formula *FD'F'D*. Aceasta realizează permutarea circulară *(fs)* → *(fd)* → *(ds)* → *(fs)* și această permutare este suficientă, deoarece nu pot exista configurații în care numai două piese să fie deplasate.

În acest moment, toate „lentilele" sînt la locul lor, eventual neorientate. Oricum, un număr par de piese sînt neorientate. Pentru orientarea lor vom folosi formula de la subpasul 3.2 al primului algoritm, ținînd sfera în mînă în poziția potrivită (formula reorientează piesele din *(js)* și *(jf)*).

Cel de-al doilea algoritm folosește mai multe formule decît primul, dar acestea sînt mai scurte (de fapt, numai ultima formulă este ceva mai complicată, pașii 1 și 2 putînd fi redescoperiți). În plus, al doilea algoritm este și ceva mai rapid decît primul. Primul necesită (în cazurile cele mai defavorabile, dar aplicînd formula de la subpasul 3.1 invers, de la dreapta spre stînga și schimbînd X cu X' și X' cu X, în loc să o aplicăm de două ori) cel mult 67 de operații elementare. Al doilea algoritm cere cel mult 60 de operații și anume: cel mult 4 operații la pasul 1, cel mult cîte 9 mutări pentru primele două „lentile" la subpasul 2.1 (4 pentru scoaterea lor din cercul ales, una intermediară, pentru aducerea piesei în *(jf)* și 4 pentru aducerea lor la locul potrivit, în vîrf), 4 mutări pentru cea de a treia „lentilă" la subpasul 2.1, 4 mutări pentru realizarea subpasului 2.2 (formula $FD'F'D$ sau inversa acesteia, atunci cînd $FD'F'D$ trebuie aplicată de două ori), precum și cel mult două aplicări ale formulei de la pasul 3 (la 2.1, primele două „lentile" au fost aduse orientate).

Bineînțeles, la pașii 2 ai ambilor algoritmi pot fi economisite cîteva mutări alegînd adecvat vîrful și „lentilele" cu care începem restaurarea sferei. Probabil că sînt posibile și formule mai scurte pentru pașii 3 ai acestor algoritmi. Găsirea celui mai eficient algoritm de restaurare a sferei lui Varga rămîne un subiect de studiu. Are cititorul vreo idee?

5.7. Solitarul

De fapt, sub acest nume sînt cunoscute o serie întreagă de probleme inventate, se spune, în secolul al XVIII-lea de un conte francez, în timpul unei îndelungi și, desigur, plictisitoare detenții (R.C. Bell, *Board and table games from many civilizations*). Toate aceste probleme au ca suport tabla jocului medieval *Vulpea și găștele* (fig.112), pe care sînt

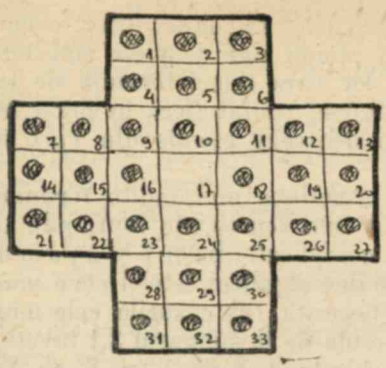

Fig. 112

aşezaţi pioni identici, în fiecare căsuţă cîte unul, lăsînd una sau mai multe căsuţe libere. Fiecare pion poate sări peste un pion vecin, orizontal sau vertical (nu şi diagonal deci), cu condiţia ca în spatele acestuia să existe o căsuţă liberă. Pionul peste care se sare este eliminat.

Problema „standard" pleacă de la poziţia din fig.112 şi cere ca, prin mutări adecvate, să fie eliminaţi toţi pionii, mai puţin unul care să ajungă în final exact în centrul tablei, acolo unde iniţial aveam o căsuţă liberă. Deoarece avem de eliminat 31 de piese, iar la fiecare săritură se elimină una dintre ele, problema poate fi rezolvată în exact 31 de mutări elementare. Pentru a le prezenta, voi adopta numărătoarea din fig. 112 a căsuţelor tablei. Fiecare mutare va fi atunci identificată printr-o pereche *(a, b)* de numere, *a* fiind căsuţa de plecare, iar *b* cea de sosire (cu eliminarea piesei intermediare). De exemplu, (5, 17) reprezintă un salt din căsuţa 5 în căsuţa 17, cu eliminarea piesei din căsuţa 10.

O soluţie a problemei anterioare este deci următoarea: (5, 17), (12, 10), (3, 11), (18, 6), (1, 3), (30, 18), (3, 11), (27, 25), (24, 26), (13, 27), (22, 24), (27, 25), (31, 23), (16, 28), (33, 31), (4, 16), (31, 23), (7, 9), (10, 8), (21, 7), (24, 10), (7, 9), (10, 8), (19, 17), (8, 22), (16, 18), (22, 24), (24, 26), (11, 25), (26, 24), (29, 17).

Să procedăm însă ca la jocul de dame (oricum, mutările de aici seamănă cu acelea, doar că nu se mai fac pe diagonală) şi să considerăm un şir de salturi legate ca fiind o singură mutare. În soluţia anterioară apăreau, de exemplu, paşii

(22, 24), (24, 26), care constituie deci o singură mutare din acest punct de vedere. De asemenea, schimbînd ordinea unor sărituri se putea face la un moment dat mutarea de cinci paşi (24, 10), (10, 8), (8, 22), (22, 24), (24, 26). În acest fel, soluţia anterioară se poate scurta; ea este formată din numai 23 de mutări de acest gen.

Apare ca naturală întrebarea: care este numărul minim de mutări prin care poate fi rezolvată problema iniţială a solitarului?

Încă din anul 1908, H.E. Dudeney a dat o soluţie în numai 19 mutări. Iat-o (o mutare constînd din mai multe salturi va fi indicată printr-o singură paranteză în care vor fi scrise toate numerele căsuţelor prin care trece pionul respectiv):

(5, 17), (24, 10), (19, 17, 5), (6, 18), (13, 11), (8, 10, 12), (1, 9), (16, 4), (28, 16), (21, 23), (26, 24, 22), (33, 25), (18, 30), (3, 1, 9), (7, 21, 23), (32, 33, 25), (27, 13, 11), (16, 4, 6, 18, 30, 28, 18), (14, 17).

Patru ani mai tîrziu a fost obţinută o soluţie cu o mutare mai economicoasă, pentru ca exact o jumătate de secol problema să rămînă în acest stadiu. În anul 1962, J.D. Bearey publică în revista „Eureka" „Some notes on Solitaire", în care demonstrează că soluţia din 1912 este optimă: nu există nici o posibilitate de rezolvare a problemei solitarului care să folosească mai puţin de 18 mutări. Iată această soluţie în 18 mutări:

(5, 17), (12, 10), (3, 11), (18, 6), (30, 18), (27, 25), (24, 26), (13, 27, 25), (9, 11), (7, 9), (22, 24, 26, 12, 10, 8), (31, 23), (16, 28), (33, 31, 23), (21, 7, 9), (1, 3, 11, 25), (4, 16, 28, 30, 18, 16), (15, 17).

Nu voi prezenta demonstraţia lui J.D. Bearey aici; deşi ea nu foloseşte cunoştinţe matematice deosebite (numai elemente de algebră), ea este totuşi destul de minuţioasă.

În problema anterioară se cerea eliminarea tuturor pieselor, cu excepţia uneia singure care în final trebuie să ajungă în pătratul 17. Nu ne interesa însă care era aceea. O complicaţie în plus (deci un plus de atractivitate pentru experţi...) apare atunci cînd ne propunem de la început care pion să fie cel care rămîne ultimul pe tablă. Mai general, pot fi formulate probleme de acest gen pentru orice pereche de nu-

mere *(a, b)*, *a* desemnînd căsuța goală în începutul „pasienței", iar *b* pionul pe care dorim să-l avem în final pe tablă (de o culoare diferită de ceilalți, de exemplu). Încă o complicație ar apare dacă, la fel ca la problema standard, ne-am fixa și locul în care să rămînă în final piesa „supraviețuitoare". O asemenea problemă nu are însă soluție decît de foarte puține ori. În primul rînd, este clar că o piesă care inițial pleacă dintr-o căsuță pară, se va găsi în fiecare moment tot într-o căsuță pară și orice piesă care pleacă dintr-o căsuță impară va „călca" numai prin căsuțe impare. Dintr-o dată jumătate din căsuțe sînt astfel eliminate dintre candidatele pentru găzduirea piesei finale. Dar nu numai piesa „supraviețuitoare", ci și locul gol inițial impune o restricție similară asupra căsuțelor care pot fi finale. Mai precis, există următoarea *regulă a lui trei* care acționează aici: de la locul gol inițial se poate ajunge la locul piesei finale prin sărituri peste cîte două căsuțe (la distanță trei) — vezi un exemplu în fig. 113.

Justificarea acestei reguli face apel la un calcul algebric în același timp ingenios și surprinzător. Iată-l. Să introducem pe mulțimea numerelor 1, 2,...,33 care notează căsuțele tablei o operație de „înmulțire" și o relație de „egalitate" în felul următor: dacă piesa *a* poate sări peste piesa *b*, ajungînd în *c*, scriem

$$ab = c.$$

Să echivalăm însă săritura lui *a* peste *b* cu cea a lui *b* peste *a*. Considerînd patru căsuțe aliniate, *a*, *b*, *c*, *d*, cu *b* și *c* ocupate cu piese, putem deci face două „înmulțiri"

$$bc = d$$
$$a = bc$$

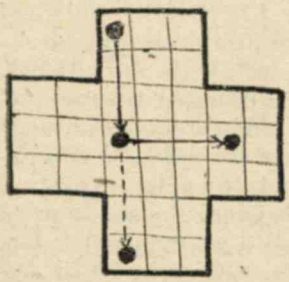

Fig. 113

de unde deducem că

$$a = d$$

Reținem deci că *două căsuțe aflate la distanță trei sînt „egale"*.

Mai departe: dacă avem

$$ab = c$$

atunci la fel de bine avem

$$bc = a$$

„Înmulțim" membru cu membru,

$$abbc = ac$$

„simplificăm" prin a și c și obținem

$$bb = 1.$$

În cuvinte, *două piese așezate în același loc valorează cît nici una* (cît elementul neutru față de „înmulțire"). De aici se poate obține un al doilea rezultat important: dacă

$$ab = c$$

„înmulțind" cu c obținem

$$abc = cc$$

deci, cu $cc = 1$, obținem

$$abc = 1$$

sau, în cuvinte: *trei piese coliniare valorează cît nici una.*

Un al treilea rezultat important se obține din egalitatea

$$a = d$$

valabilă pentru orice piese aflate la distanță trei, prin înmulțire cu a sau cu d,

$$aa = ad.$$

Cum $aa = 1$, obținem

$$ad = 1$$

deci, *două piese la distanță trei se anulează una pe alta* (valorează împreună cît nici una).

Să revenim la „regula lui trei". Inițial, tabla solitarului este plină, cu excepția unui loc gol. În plus, tabla este formată din 11 șiruri de cîte trei piese alăturate, dintre care 10 sînt complete. Aceste 10 triplete pot fi fiecare în parte „egalate" cu 1, conform egalității anterioare, $abc = 1$. Putem deci ignora aceste piese. Pe linia cu locul gol există numai două piese. Da, dar $aa = 1$. Înlocuim atunci locul gol cu... două piese. Obținem astfel un șir de trei piese (una avînd o piesă deasupra); și aceste trei piese pot fi anulate cu ajutorul egalității $abc = 1$. Rămîne pe tablă o singură piesă, în locul gol inițial. Această piesă este „egală" cu orice piesă aflată peste două căsuțe de locul gol; la rîndul ei, oricare asemenea căsuță este „egală" cu una la distanță trei. Și așa mai departe. Poziția inițială este deci egală cu una în care piesa rămasă poate fi readusă în locul gol de plecare prin mutări peste cîte două căsuțe. Exact „regula lui trei".

Prin urmare, plecînd cu un loc gol într-o căsuță x și dorind ca în final să „supraviețuiască" o piesă aflată la început într-o căsuță y, această piesă se va găsi în final într-o căsuță aflată la intersecția restricțiilor precizate de „regula lui trei" și de „regula lui doi" (păstrarea parității). De exemplu, plecînd cu căsuța liberă 4 și dorind ca în final să rămînă pe tablă piesa 2, pe de o parte piesa 2 nu poate circula decît prin căsuțele pare, pe de altă parte, din 4 nu se poate ajunge prin sărituri peste două căsuțe decît în 23 și apoi în 26. Numai 26 respectă ambele condiții, deci numai aici avem șanse să aducem în final piesa din 2 (pentru 23 nu există soluție; raționamentul anterior nu garantează însă existența unei soluții pentru 26, în general, pentru *toate căsuțele* care satisfac cele două restricții).

Există și o altă variantă a solitarului (numită „continetală", pentru a o deosebi de cea din fig. 112, numită „englezească") și care folosește o tablă cu patru căsuțe în plus (fig. 114).

Pe această tablă funcționează următoarea restricție la încercarea de a pleca cu un singur loc gol și de a termina cu un singur pion pe tablă: dacă a este poziția locului gol, iar b poziția piesei finale, atunci, în termenii calculului anterior, trebuie să avem

ab = centrul tablei

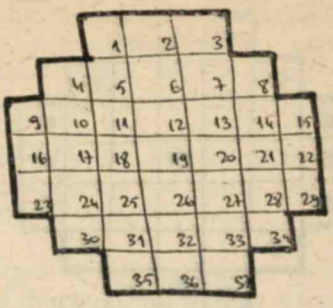

Fig. 114

Prin urmare, problema are soluţie numai dacă locul gol iniţial se găseşte în mulţimea

{1, 18, 35, 21}

iar piesa finală în mulţimea

{37, 20, 3, 17}

sau invers şi, de asemenea, dacă locul gol iniţial se găseşte în mulţimea

{6, 29, 26, 23}

iar piesa finală în

{32, 9, 12, 15}.

Pe această tablă pot fi însă duse la bun sfîrşit o serie de încercări cu final decorativ. Încercaţi, de pildă, să ajungeţi la configuraţiile din fig. 115 (plecînd de fiecare dată cu căsuţa 19 liberă). Cîte o soluţie pentru fiecare dintre aceste probleme este dată mai jos):

Fig. 115a: (6, 19), (4, 6), (18, 5), (6, 4), (9, 11), (24, 10), (11, 9), (26, 24), (35, 25), (24, 26), (33, 31), (27, 25), (25, 35), (29, 27), (14, 28), (27, 29), (19, 21), (7, 20), (21, 19);

Fig. 115b: (6, 19), (8, 6), (2, 12), (4, 6), (18, 5), (20, 7), (1, 11), (3, 13), (16, 18), (22, 20), (30, 17), (34, 21), (26, 24), (12, 26), (26, 28), (21, 19), (18, 5), (5, 7), (7, 20), (20, 18), (17, 19), (23, 25), (36, 26), (26, 24), (35, 25), (24, 26), (29, 27), (27, 25), (9, 11), (15, 13), (37, 27);

Fig. 115c: (6, 19), (10, 12), (19, 6), (2, 12), (4, 6), (17, 19), (31, 18), (19, 17), (16, 18), (30, 17), (21, 19), (7, 20), (19, 21), (22, 20), (8, 21), (32, 19), (28, 26), (19, 32), (36, 26), (34, 32).

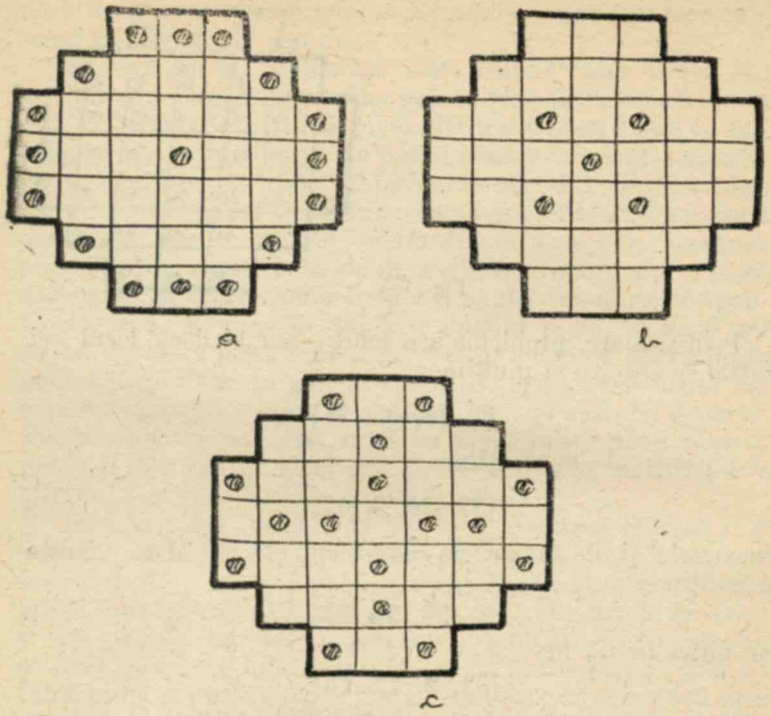

Fig. 115

Pentru ambele forme ale tablei (ba chiar pentru orice tablă, chiar şi pentru cea de şah) solitarul poate fi transformat şi într-un joc de două persoane. O posibilitate este ca fiecare jucător să plece din poziţia de start şi să încerce să elimine cît mai multe piese de pe tablă. Cîştigă cel care a eliminat mai multe. Evident, jocul nu este interesant pentru „experţi", deoarece aceştia vor termina totdeauna la egalitate (cu cîte o singură piesă pe tabla din fig. 112). Jucînd însă pe table modificate, variabile eventual de la o partidă la alta (ca în cazul morii, vezi paragraful 4.3), lucrurile pot deveni totuşi interesante. O altă posibilitate este ca mutările să se facă pe rînd, piesele ridicate de pe tablă intrînd în posesia celui care le ridică. Jocul va fi cîştigat de cel care capturează mai multe piese. Din păcate, foarte multe dintre primele mutări

vor elimina exact cîte o piesă, ba chiar există posibilitatea ca o întreagă partidă să constea în asemenea mutări, neputîndu-se deci niciodată face mutări legate. Iată o asemenea partidă: (29, 17), (26, 24), (33, 25), (12, 26), (31, 33), (18, 30), (10, 12), (2, 10), (9, 11), (16, 18), (11, 25), (14, 16), (7, 9), (13, 11), (6, 18), (25, 11), (33, 25), (23, 31), (21, 23), (16, 28), (25, 23), (27, 13), (28, 16), (9, 23), (1, 9) (pe tabla „englezească"). În final mai rămîn încă 7 piese; primul jucător învinge totuşi cu un punct.

Pentru a elimina această lipsă de dinamism se poate accepta ca mutările să se facă şi diagonal, nu numai ortogonal. Jocul se complică atunci considerabil şi analiza lui nu mai pare deloc simplă.

5.8. Domino-dodecaedru

Un dodecaedru este un poliedru regulat, avînd douăsprezece feţe pentagonale egale (fig. 116). Jocul (imaginat de autor şi fabricat de I.B.M.-Arad) are la bază următoarea idee simplă: să se marcheze într-un mod oarecare (prin culori, de exemplu) muchiile fiecărei feţe a dodecaedrului, muchiile a două feţe vecine avînd aceeaşi culoare, să se strice cumva această corespondenţă şi să se încerce revenirea la ordinea iniţială. Pentru aceasta este nevoie ca feţele dodecaedrului să aibă o anumită mobilitate, fie să se rotească în jurul axului central, fie să poată fi detaşate şi apoi reaşezate în orice alt loc pe dodecaedru.

Desigur, jocuri similare pot fi imaginate pentru toate cele cinci poliedre regulate posibile, dar dodecaedrul pare a asigura o complexitate rezonabil de mare problemei şi în acelaşi timp o manevrabilitate sporită şi un aspect mai decorativ jocului.

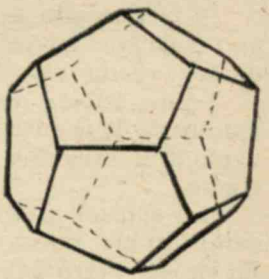

Fig. 116

Pentru a ușura producerea jocului, proiectul lui logic trebuia să răspundă la mai multe cerințe:

— muchiile să fie marcate cu cît mai puține culori,

— să se folosească fețe de cît mai puține tipuri (ca marcaj),

— montarea fețelor pe dodecaedru (în varianta cu fețele rotitoare) să se facă într-un mod simplu, fără a conduce la produse finale defectuoase din punct de vedere logic (fără soluție, de exemplu).

Cu gîndul la aceste obiective, s-au folosit numai trei culori (să le notăm cu *a*, *b* și *c*; jocul produs de I.B.M. Arad folosește roșu, galben și albastru) și numai trei tipuri de fețe (*A*, *B* și *C*). Pentru a identifica o față, vom citi culorile muchiilor ei, în sensul acelor ceasornicului, începînd cu oricare dintre ele. Cele trei tipuri de fețe vor fi marcate astfel:

tip A — $abcbc$
tip B — $abcac$
tip C — $abcab$

În vederea unei ușoare memorări a lor, să remarcăm că fețele de tip *A* au o singură latură marcată cu *a*, cele de tip *B* au o singură latură marcată cu *b*, iar cele de tip *C* conțin o singură latură marcată cu *c*.

Pe dodecaedru vor exista cîte patru fețe de fiecare tip.

Montarea a fost preconizată a se face astfel:

— se montează o față de un tip oarecare, într-un loc oarecare,

— se montează pe poziția diametral opusă o față de același tip,

— se montează alături de prima față încă o față de același tip,

— se montează pe poziția diametral opusă încă o față de același tip.

În felul acesta au fost epuizate toate cele patru fețe de un tip dat (nu contează care). Au apărut astfel două grupuri de fețe vecine care formează fiecare cîte două „unghiuri".

— din oricare din cele două tipuri de piese rămase, se montează două piese în unghiurile unei perechi și două în unghiurile celeilalte perechi de piese montate la primul stadiu.

Am epuizat astfel un al doilea tip de piese (nu contează care). Au mai rămas de completat patru fețe ale dodecaedrului cu cele patru fețe de ultimul tip.

Apar în acest moment o serie de probleme interesante. Cîte variante de jocuri sînt obținute printr-o asemenea montare (ignorînd deci tipul pieselor montate)? Au ele soluție? Cîte soluții?

În primul rînd, este ușor de văzut că avem șase moduri posibile de a monta jocul, cele șase permutări ale literelor A, B, C (la fiecare stadiu se montează piese de un singur tip):

$$A\,B\,C,\ A\,C\,B,\ B\,A\,C,\ B\,C\,A,\ C\,A\,B,\ C\,B\,A.$$

Obținem deci cel mult șase jocuri diferite din punct de vedere logic.

Să deformăm topologic dodecaedrul (îl presupunem din cauciuc și-l turtim convenabil) și să-l proiectăm în plan pentru a examina mai ușor aceste variante (fig. 117). Marcăm în proiecție cu 1, 2, 3 fețele montate la stadiul 1, 2, 3, respectiv. Să observăm că fețele de la pasul 2 apar în unghiurile celor de la pasul 1, fețele de la pasul 1 apar în unghiurile celor de la pasul 3 iar cele de la pasul 3 apar în unghiurile celor montate la pasul 2. Configurația este deci caracterizată de perechile

$$(2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$$

(a, b) are semnificația „piesele *a* apar în unghiurile pieselor *b*“). Să scriem aceste triplete de perechi pentru cele șase variante de montare:

$$(B,\ A),\ (A,\ C),\ (C,\ B)$$

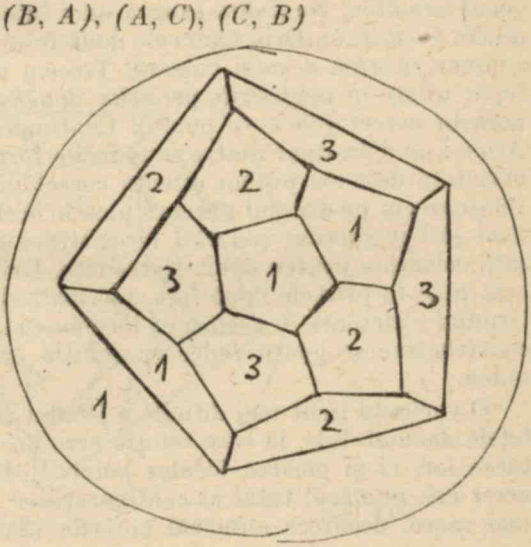

Fig. 117

$(C, A), (A, B), (B, C)$
$(A, B), (B, C), (C, A)$
$(C, B), (B, A), (A, C)$
$(A, C), (C, B), (B, A)$
$(B, C), (C, A), (A, B).$

Să observăm că, de fapt, avem numai două triplete distincte, celelalte fiind reordonări ale lor:

$(A, B), (B, C), (C, A)$
$(B, A), (A, C), (C, B)$

deci nu există decît două variante logice care pot fi obținute prin montajul anterior.

Ambele variante ale jocului au soluție. Pentru varianta identificată de tripletul $(A, B), (B, C), (C, A)$ soluția este indicată în fig. 118, iar pentru cea dată de $(B, A), (A, C), (C, B)$ este indicată în fig. 119.

Mai mult, de fiecare dată soluția este unică; deși prin rotirea fețelor pot fi obținute

$$5^{12} = 244\,140\,625$$

de configurații distincte ale jocului, numai în una dintre ele muchiile laturilor vecine sînt colorate identic! Pentru a vedea aceasta se poate urma un raționament exhaustiv de genul următor. Ne fixăm asupra unei fețe. Considerăm unul dintre vecinii săi. Orientăm cele două fețe astfel încît laturile comune să aibă aceeași culoare. Trecem apoi la una dintre fețele aflate în unghiurile primelor două și o orientăm și pe aceasta corect (dacă se poate). Continuăm în felul acesta. Atunci cînd în unul dintre unghiurile formate de două fețe orientate deja nu putem orienta corect piesa respectivă, ne reîntoarcem pe drumul parcurs pînă în acel moment (trebuie deci să-l memorăm sau să-l înregistrăm cumva), alegînd o altă orientare pentru două dintre fețe. Eventual ne reîntoarcem pînă la primele două fețe, reorientîndu-le și pe acestea. Urmînd sistematic o asemenea încercare, în ambele variante constructive se poate vedea că soluția există și că ea este unică.

O variantă mult mai dificilă a jocului anterior este cea cu fețele demontabile, la care soluția cere deci nu numai orientarea lor, ci și găsirea locului potrivit. În primul rînd, în acest caz numărul total al configurațiilor posibile este mult mai mare, deoarece numărul anterior (244 140 625) trebuie

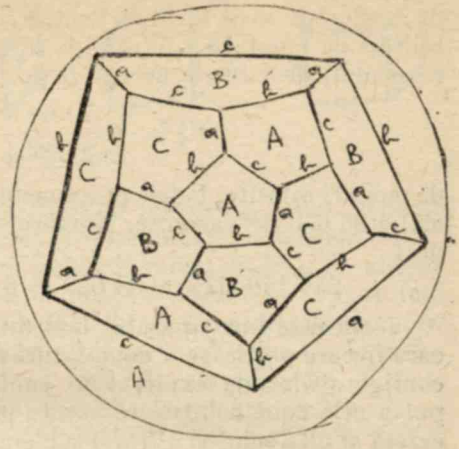

Fig. 118

înmulțit cu numărul de dispuneri neorientate posibile ale fețelor pe dodecaedru. Care este acest număr? Cele patru fețe de tip A pot fi plasate în

$$C_{12}^{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

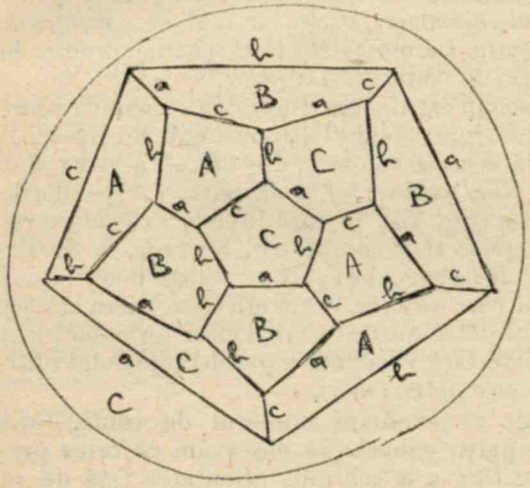

Fig. 119

de moduri în cele 12 fețe. Pentru fiecare dintre aceste posibilități de montare a fețelor A, rămîn libere 8 fețe ale dodecaedrului, deci fețele de tip B pot fi plasate în

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

de moduri diferite. Fețele C vor ocupa locurile libere. Obținem astfel 34 650 de variante. Numărul total de configurații este deci

$$244\,140\,625 \times 34\,650 = 8\,459\,472\,656\,250$$

Jocul este incomparabil mai dificil decît cel anterior (la care fiecare potrivire a două laturi reducea de 5 ori numărul configurațiilor de explorat în continuare). El are însă cel puțin cele două soluții prezentate în figurile 118 și 119. Mai există și alte soluții? Cîte? Problema rămîne a fi investigată în continuare.

5.9. Cubo-turn și hexa-turn

Am inventat cuvîntul *cubo-turn* tocmai pentru că se referă la un joc vechi și care are o sumedenie de nume, un altul la fiecare nouă apariție pe piață... În „Science et Vie" din august 1981 el este numit *Kamicub*. O vreme a circulat prin America sub numele de *Katzenjammer puzzle*, iar mai de curînd sub cel de *Instant Insanity*. La noi există în magazine, produs de „Viitorul"-Oradea, sub numele *Logicolor*.

În sine, ideea jocului este foarte simplă: patru cuburi egale au fețele marcate cu patru culori (fiecare cub are deci cel puțin două fețe de aceeași culoare). De obicei acestea sînt roșu *(R)*, galben *(G)*, verde *(V)* și albastru *(A)*. Culorile sînt distribuite ca în fig. 120, în care literele exterioare reprezintă culorile fețelor ascunse privirii. Se vede că fiecare cub conține toate cele patru culori și că nu există două cuburi identice. Problema care se cere rezolvată este aceea a așezării cuburilor unul peste altul (formînd deci un cubo-turn) astfel încît pe oricare față verticală a paralelipipedului obținut să apară toate cele patru culori.

Pentru început, să evaluăm numărul de configurații realizabile cu cele patru cuburi. Să observăm că orice permutare a cuburilor fără a le schimba orientarea față de un

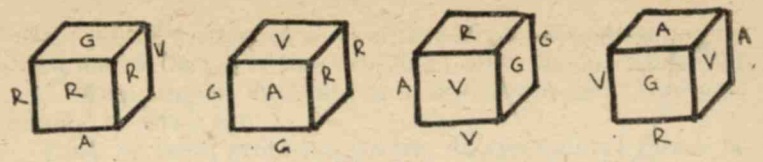

Fig. 120

reper oarecare păstrează soluțiile problemei; vom renunța deci la a mai lua în seamă și permutările cuburilor (altfel, numărul care urmează ar trebui înmulțit cu 24). Să alegem un cub. Un al doilea cub ar putea fi așezat pe oricare față a lui, dar așezarea pe două fețe opuse corespunde interschimbării celor două cuburi, deci nu ne interesează. Al doilea cub poate fi deci așezat pe trei fețe ale primului. Fiecare asemenea așezare poate fi făcută cu oricare dintre cele 6 fețe ale cubului al doilea și pentru fiecare dintre ele putem distinge patru posibilități de rotire a acestuia. Am obținut $3 \times 6 \times 4$ variante. Alipirea cubului al treilea se poate face tot cu oricare dintre cele șase fețe, pentru fiecare având patru posibilități de orientare. La fel pentru ultimul cub. Numărul total al configurațiilor (fără a distinge permutările) este deci

$$3 \times 24 \times 24 \times 24 = 41\,472$$

un număr nu prea mare, dar oricum de ajuns pentru a nu putea rezolva prea ușor problema prin încercări, variantă cu variantă.

Mai ales că soluția este unică!

Un mod simplu prin care drumul spre soluție poate fi considerabil scurtat face apel la teoria grafurilor și a fost imaginat de către T.H. O'Beirne în *Puzzles and paradoxes*, Oxford Univ. Press, 1965, p. 112–129.

Un *graf* este o pereche (X, U), unde X este o mulțime finită oarecare, iar U este o mulțime de perechi de elemente din X. Elementele lui X sînt interpretate ca *puncte* în plan, iar perechile din U ca linii care unesc unele dintre aceste puncte (și se numesc *muchii*). Un șir de muchii, una în prelungirea alteia, formează ceea ce se cheamă un lanț în graf. Un lanț care se reîntoarce în punctul de la care a plecat se numește *ciclu*.

Exemplu: $X = \{a, b, c\}$

$U = \{(a, b), (b, c), (c, c), (c, a)\}$.

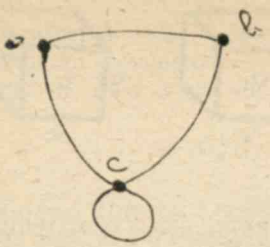

Fig. 121

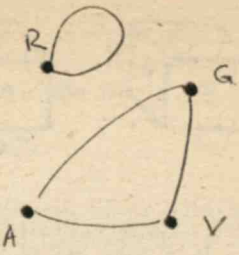

Fig. 122

Graful (X, U) este reprezentat în fig. 121; de remarcat ciclul (a, b), (b, c), (c, a), precum și ciclul (c, c) (se numește și *buclă*).

Să revenim la cubușoarele noastre și să le așezăm unul peste altul; presupunem că am nimerit din întîmplare peste o soluție a jocului. Să privim deocamdată numai partea dinspre noi a turnului și pe cea din spate. Pe fiecare dintre ele apar toate cele patru culori, R, G, V, A. Să desenăm patru puncte în plan, să le dăm numele R, G, V, A și să vedem cum se leagă ele la fiecare etaj al turnului nostru. Unim adică cu o linie culoarea din față a unui cub, cu cea din spate și aceasta pentru fiecare etaj. Obținem un graf. De exemplu, dacă, de sus în jos, culorile din față sînt R, G, V, A, iar cele din spate sînt R, V, A, G, atunci se obține graful din fig. 122. Graful acesta are două cicluri. Bineînțeles, putem obține 1, 2, 3 sau 4 cicluri și nu se putea să nu obținem pentru fiecare culoare cîte un ciclu care să o conțină, deoarece fiecare culoare apare și în față și în spate, cîte o singură dată, deci din fiecare punct al grafului trebuie să plece exact două capete de muchii și există exact patru muchii în total. Nu pot deci exista capete libere de muchii.

Un graf similar poate fi desenat și pentru fețele din stînga și din dreapta ale turnului. Soluția problemei corespunde deci unei perechi de mulțimi de cicluri (o mulțime pentru față-spate și una pentru stînga-dreapta), fiecare mulțime implicînd toate cele patru culori. Dacă în grafurile rezultate marcăm fiecare muchie cu numele cubului de la etajul respectiv,

putem pune în evidență o nouă proprietate a acestor cicluri, și anume că fiecare dintre cele două mulțimi de cicluri folosește cîte o singură dată cîte unul dintre muchiile corespunzătoare fiecărui cub.

Bun. Să luăm problema invers, dinspre cuburi spre soluție. Indiferent cum ar fi ele așezate, cuburile vor stabili cîte o muchie între fețele opuse. Obținem astfel cîte trei muchii de fiecare cub. Un graf deci. Suprapunem toate aceste patru grafuri și vom obține un graf cu patru puncte, *R*, *G*, *V*, *A*, și 12 muchii. El arată ca în figura 123, unde 1, 2, 3, 4 reprezintă cuburile, într-o numerotare oarecare.

Rezolvarea problemei se reduce deci la a căuta în acest graf două mulțimi de cicluri astfel încît fiecare mulțime să conțină toate cifrele 1, 2, 3, 4 și toate cele patru puncte *R*, *G*, *V*, *A*, cîte o singură dată. Deși tot o problemă de căutare sistematică, aceasta este mult mai simplă. În primul rînd, se vede imediat că nu putem avea mulțimi de cicluri cu aceste proprietăți conținînd cîte două, trei sau patru cicluri. Fiecare mulțime se reduce deci la un singur ciclu de lungime patru și este vizibil care sînt acestea: *(R, V)*, *(V, G)*, *(G, A)*, *(A, R)* și *(R, A)*, *(A, G)*, *(G, V)*, *(V, R)*, folosind muchiile 1, 3, 4, 2 și, respectiv, 2, 4, 3, 1 (fig. 124). Soluția este deci unică (și este chiar cea indicată în fig. 120).

Jocul hexa-turn, anunțat în titlul acestui paragraf, este înrudit cu el discutat mai sus și, deocamdată, se găsește doar în stadiul de prototip la autor. El este format din șase platouri (piese) hexagonale, care se pot așeza unul peste

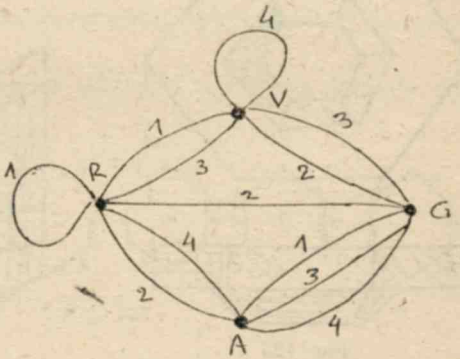

Fig. 123

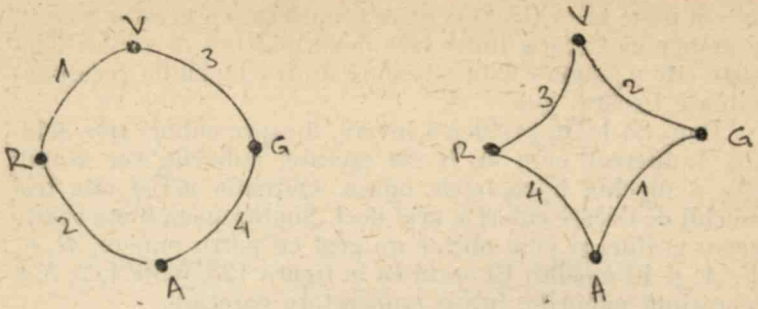

Fig. 124

altul formînd un turn cu șase niveluri (platourile au o adîncitură, ca farfuriile, de aceea nu se pot așeza alături altfel decît orientate cu „fața" în aceeași parte — vezi figurile 125 și 126). Spre exterior, cele șase muchii ale platourilor sînt colorate (sau pot fi marcate cu puncte ca la domino); se folosesc patru culori distincte (deci 1, 2, 3 sau 4 puncte).

Problemă: să se așeze platourile unul peste altul în așa fel încît pe oricare față laterală a turnului format astfel, oricare trei muchii vecine să fie colorate diferit (o culoare să nu se repete nici lîngă ea însăși, nici separată de o alta, ci, cel mai devreme, separată de două culori diferite).

Numărul variantelor posibile de așezare a celor șase platouri unul peste altul este foarte mare. În primul rînd, cele șase platouri pot fi ordonate unul în raport cu altul în 6! =

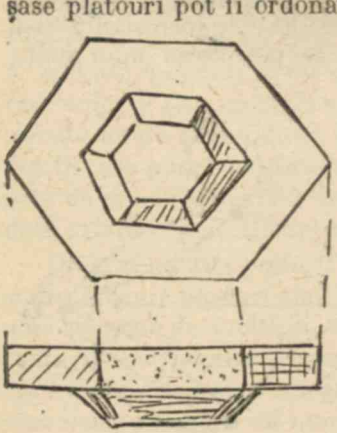

Fig. 125

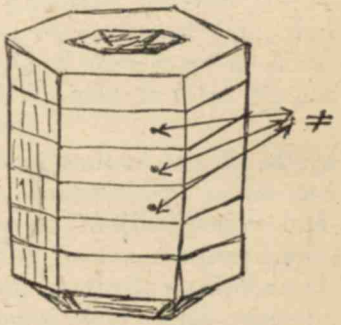

Fig. 126

720 de variante (de data aceasta, ordinea platourilor contează): pe primul loc poate sta oricare dintre cele șase piese, pe locul doi oricare dintre cele cinci piese rămase, pe locul trei oricare dintre celelalte patru și așa mai departe. Nu am considerat încă orientarea fiecărei piese (rotirea în jurul axului ei central). Să luăm, într-o variantă dintre cele 720 anterioare, prima piesă ca reper. În raport cu ea, a doua piesă poate fi orientată în 6 feluri. La o orientare dată a primelor două piese, cea de a treia poate fi orientată tot în șase feluri. Și așa mai departe, pînă la ultima piesă, deci fiecare variantă dintre cele 720 are 6^5 variante de orientare. Numărul total al variantelor este deci

$$6! \times 6^5 = 720 \times 7\,776 = 5\,598\,720$$

Evident, pentru ca jocul să fie „serios" (corect), el trebuie să aibă măcar o soluție și pentru a fi atractiv și spectaculos, el trebuie să aibă exact o soluție. (De fapt, *două*, deoarece orice soluție poate fi așezată și invers, oglindită.)

Această restricție esențială poate fi trebuie rezolvată prin modul de dispunere a culorilor pe muchiile platourilor. Iată o dispunere care răspunde acestor cerințe. Considerăm patru culori, notate 1, 2, 3, 4 (puncte domino) și considerăm cele șase moduri de colorare din figura 127. Toate platourile sînt deci colorate diferit.

O soluție a problemei pentru aceste colorări este (cu notațiile din această figură): *D*, *F*, *A*, *C*, *B*, *E* (și, evident, și *E*, *B*, *C*, *A*, *F*, *D*, adică ordonarea inversă).

Această soluție este unică. Într-adevăr, să observăm că cinci din cele șase platouri au anumite regularități de așezare a culorilor:

A — are două muchii aflate la 180° una față de alta, colorate cu 1,

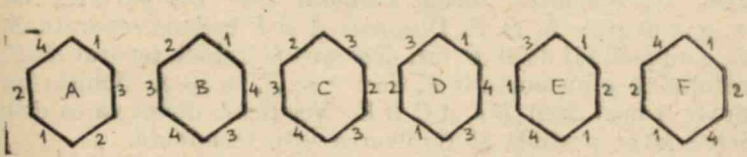

Fig. 127

C — are trei muchii aflate la 120° colorate cu 3,

D — are culorile 1 și 3 așezate la 180°, fiecare pe cîte două muchii,

E — are culoarea 1 pe două muchii așezate la 120°,

F — are culoarea 1 pe două muchii așezate la 180°.

Două platouri care au o culoare x, unul pe două muchii la 180° și unul pe două muchii la 120°, nu pot sta alături și nici separate de o singură piesă, deoarece în orice variantă de orientare a lor, două muchii colorate cu x se suprapun. Două asemenea platouri vor fi numite *inamice*. Sînt deci inamice toate perechile

$$(A, E),\ (C, D),\ (D, E),\ (E, F).$$

Reținem că D trebuie separat atît de C cît și de E. Rezultă de aici că platoul D nu se poate afla între C și F (ar fi nevoie de patru platouri în plus pentru a-l separa pe D atît de C cît și de F). Deoarece E este inamic cu fiecare dintre A, D, și F, rezultă că celelalte două piese, B și C, trebuie să se găsească între E și fiecare dintre A, D și F. Prin urmare, C, se găsește între D și E (și știam deja că între D și C există cel puțin două piese).

Între D și C nu se pot afla toate piesele A, B, F, deoarece și (B, F) este o pereche de platouri inamice (verificăm acest lucru direct, încercînd toate cele șase orientări reciproce posibile ale acestor piese). Prin urmare, între D și C apar numai două piese și anume sau A și B, sau A și F.

Să presupunem că C se găsește lîngă E, deci avem o așezare de forma $x\ D\ y\ z\ C\ E$. Deoarece E trebuie separat și de A și de F, rezultă că yz nu poate fi decît AB. Tripletul $D\ A\ B$ nu este însă corect: A se poate așeza lîngă B într-o singură orientare, iar D lîngă A de asemenea, fără a avea muchii vecine colorate identic. În această unică posibilitate de ordonare a lui $D\ A\ B$ pentru a nu avea culori vecine, apar trei culori identice la D și B, deci triplete de culori interzise. În concluzie, forma turnului este $D\ x\ y\ C\ z\ E$, cu x, y, z printre A, B, F. Deoarece A și F trebuie separate de E, z nu poate fi decît B, iar, deoarece B trebuie separat de F, rezultă că y nu poate fi F, deci $x = F$, $y = A$. Soluția nu poate fi deci decît $D\ F\ A\ C\ B\ E$. Verificăm direct că ea este într-adevăr posibilă și rezolvarea este terminată.

Raționamentul anterior este o cale logică, evitînd încercările, de a căuta soluția hexa-turnului.

O problemă înrudită, mai simplă, este următoarea: să se aşeze cele şase platouri în aşa fel încît oricare *două* muchii vecine, dintr-o faţă laterală a hexa-turnului să fie colorate diferit. Evident, orice soluţie pentru triplete este soluţie şi pentru această problemă. Există însă şi soluţii în plus? Cîte? Iată două dintre ele:

$$E\,C\,B\,A\,D\,F$$
$$E\,B\,C\,A\,D\,F$$

Cîte asemenea posibilităţi există? În primul rînd, să observăm că pentru a găsi soluţia, trebuie să examinăm numai relaţiile de *amiciţie* şi *inamiciţie* între oricare două piese. Ajungem din nou la considerarea unui graf, avînd ca puncte cele şase platouri, A, B, C, D, E, F, între care trasăm muchiile indicate de relaţiile de amiciţie (legăm două puncte X, Y dacă platoul X poate sta lîngă platoul Y). Graful obţinut este reprezentat în figura 128.

Orice lanţ în acest graf care trece prin toate punctele A, B, C, D, E, F o singură dată (un asemenea lanţ se numeşte *lanţ hamiltonian*) corespunde unei soluţii a problemei. Problema iniţială revine deci la a căuta toate lanţurile hamiltoniene în graful din figura 128. Vom întreprinde o asemenea

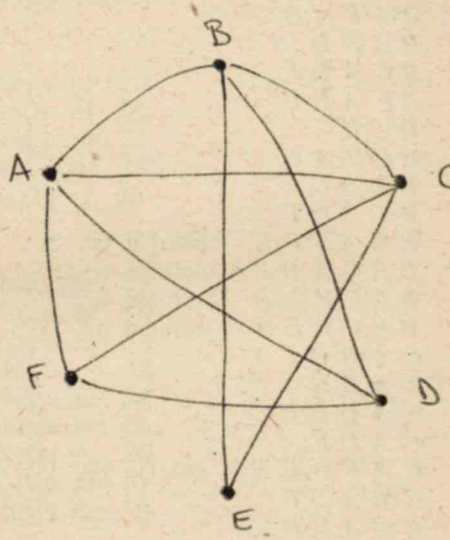

Fig. 128

căutare sistematică, folosind algoritmul lingvistic, lexicografic, prezentat în *Mecanisme generative ale proceselor economice* (Gh. Păun, Edit. Tehnică, București, 1981). Pe scurt, vom considera, în ordine alfabetică, toate cuvintele de lungime cel mult șase formate cu literele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, folosind o singură dată fiecare literă în fiecare cuvînt și astfel încît oricare două litere vecine să fie legate printr-o muchie în graful anterior. Obținem următoarele cuvinte avînd aceste proprietăți și maximale ca lungime:

A B C E (nu mai poate fi prelungit)
A B C F (idem)
A B D F
A B E C F D — o primă soluție a problemei
A C B D F
A C B E
A C E B D F — soluția nr. 2
A C F D B E — soluția nr. 3
A D B C E
A D B C F
A D F C B E — soluția nr. 4
A D F C E B — soluția nr. 5
B A C E
B A D F C E — soluția nr. 6
B A F C E
B A F D
B C A D F
B C A F D
B C E
B C F A D
B D A C E
B D A C F
B D A F C E — soluția nr. 7
B E C A D F — soluția nr. 8
B E C F A D — soluția nr. 9
B E C F D A — soluția nr. 10
C A B D F
C A B E
C A D B E
C A D F
C A F D B E — soluția nr. 11
C B A D F
C B A F D

C E B A D F — soluția nr. 12
C E B A F D — soluția nr. 13
C E B D A F — soluția nr. 14
C E B D F A — soluția nr. 15
C F A B D
C F A B E
C F A D B E — soluția nr. 16
C F A D F
D A B C E
D A B C F
D A B E C F — soluția nr. 17
D A C B E
D A C E B
D A C E
D B A C E
D B A F C E
D B A F C E — soluția nr. 18
D F A B C E — soluția nr. 19
D F A B E C — soluția nr. 20
D F A C B E — soluția nr. 21
D F A C E B — soluția nr. 22
E B A C F D — soluția nr. 23
E B A D F C — soluția nr. 24
E B A F C
E B A F D
E B C A D F — soluția nr. 25
E B C A F D — soluția nr. 26
E B C F A D — soluția nr. 27
E B C F D A — soluția nr. 28
E C A B D F — soluția nr. 29
E C A D B
E C A D F
E C A F D B — soluția nr. 30
E C B A D F — soluția nr. 31
E C B A F D — soluția nr. 32
E C B D A F — soluția nr. 33
E C B D F A — soluția nr. 34
E C F A B D — soluția nr. 35
E C F A D B — soluția nr. 36
E C F D A B — soluția nr. 37
E C F D B A — soluția nr. 38
F A B C E

F A B D
F A C B D
F A C B E
F A D B C E — soluția nr. 39
F A D B E C — soluția nr. 40
F C A B D
F C A B E
F C A D B E — soluția nr. 41
F C E B A D — soluția nr. 42
F C E B D A — soluția nr. 43
F D A B C E — soluția nr. 44
F D A B E C — soluția nr. 45
F D A C B E — soluția nr. 46
F D A C E B — soluția nr. 47

Problema are deci nu mai puțin de 47 de soluții diferite, dintre care numai două sînt soluții și pentru prima problemă. Bineînțeles, încercarea de a găsi aranjări ale hexa-turnului astfel încît oricare *patru* muchii vecine, de pe fiecare față laterală, să fie marcate diferit, nu poate fi dusă la bun sfîrșit, deoarece nici una dintre soluțiile anterioare nu satisface această restricție. Rămîne o temă de cercetare pentru cititor proiectarea unui joc pentru care și asemenea probleme să aibă soluție.

5.10. Turnuri, bile, permutări...

Cubul lui Rubik nu este decît exponentul (cel mai reușit, cel mai cunoscut, cel mai dificil, cel mai...) noului val de jocuri logice de permutare. Cum spuneam, toate cele cinci poliedre regulate au fost secționate în fel și chip, colorate în fel și chip pentru a da de lucru amatorilor de permutări. Există multe alte clase de jocuri de permutare. Greu de făcut o listă. Inventivitatea umană nu se dezminte nici în acest domeniu. De pildă, există o serie de jocuri bazate pe manevrarea unor bile colorate, în intenția realizării unor configurații precizate. Bineînțeles, cu posibilități și restricții specifice. O subclasă a acestei categorii se referă la *bile așezate pe cilindru* și despre trei asemenea jocuri voi vorbi în continuare.

Primele două vin tot dinspre echipa lui Rubik. Este vorba de „turnul Babilon" și de „butoiul diavolului". Nume biblice, jocuri foarte terestre. Treizeci și șase de bile, colorate în cîte șase nuanțe (degradeuri) a șase culori, așezate în șase coloane pe suprafața laterală a unui cilindru (un trunchi de con, de fapt). Fiecare etaj se poate roti independent de celelalte în jurul axului central. Există și un loc gol, în interiorul cilindrului, în care poate fi introdusă o bilă, creîndu-se astfel un loc gol la exterior. Problema? După amestecarea bilelor (ceea ce se realizează teribil de ușor, mai ales dacă încerci să le ordonezi fără a avea un algoritm la îndemînă...), să se refacă așezarea inițială a culorilor, aducînd pe fiecare coloană bile de aceeași culoare, cu variația nuanțelor în același sens (fig. 129).

Cele 36 de bile pot forma 36-factorial combinații, ceea ce înseamnă un număr de 41 de cifre, ne informează M. de Pracontal în „Science et Vie", noiembrie, 1981. De fapt, numărul respectiv ar trebui împărțit la 6, deoarece prin rotirea turnului în mînă obținem șase clase de configurații identice. Dar și un număr de 40 de cifre rămîne la fel de inaccesibil. Numărul configurațiilor posibile pe cub are „numai" 19 cifre. Ceea ce nu înseamnă că turnul este mai dificil de rezolvat decît cubul. Dimpotrivă. Cu o singură mutare elementară (rotirea unui etaj, introducerea bilei în locul gol și rotirea inversă a etajului — ceea ce schimbă o bilă cu locul gol, fără a deranja celelalte bile) și cu puțină ingeniozitate spre finalul operațiunii, turnul poate fi rezolvat, fie coloană cu coloană (începînd cu o coloană vecină uneia dintre intrările în locul gol din interiorul turnului și continuînd în ordine,

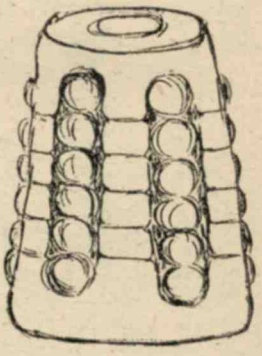

Fig. 129

în aceeași direcție), fie etaj cu etaj (de jos în sus, introducînd în locașul interior bila de jos de pe coloana respectivă).

Butoiul (zis „al diavolului" și numit uneori și „Tembiron") este o construcție mai complicată (deci mai puțin elegantă) decît cubul și turnul și, pentru cititorii care nu l-au avut niciodată în mînă, este mai dificil de descris. Un butoi. Cu cinci coloane de bile în interior. Trei coloane găzduiesc cîte cinci bile, două coloane numai cîte patru. Bilele sînt colorate patru cîte patru în cinci culori diferite, iar ultimele trei sînt negre. Inițial fiecare coloană conține cîte patru bile colorate identic, iar coloanele de cîte cinci locuri conțin la un capăt și cîte o bilă neagră. „Butoiul" are două „cercuri", de lățimea a două bile și care pot fi rotite (fig. 130, 131). Dincolo de acestea, la capete, există cîte o porțiune rigidă, de lățimea unei bile. Și mai la capete, există două discuri („fundurile butoiului") solidare, legate pe axul întregii jucării și care pot glisa spre un capăt sau altul pe distanța unei bile, prilej cu care coloanele de cîte cinci bile sînt împinse dinspre o extremitate spre cealaltă cu un „pas" de o bilă (fig. 131).

În august 1981, același M. de Pracontal spunea că nu cunoaște nici un algoritm pentru rezolvarea *Tembironului*. În noiembrie 1981, el prezintă însă în „Science et Vie" un asemenea algoritm, unul dintre mulții trimiși de către cititorii săi.

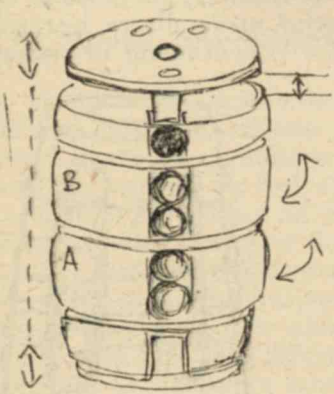

Fig. 130

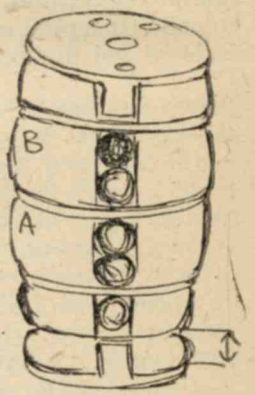

Fig. 131

Ca de obicei, în primul rînd notații: A_s = rotirea cercului A spre stînga (cu o coloană), cu cilindrul ținut vertical, iar cele două discuri de la capete împinse în sus (fig. 130), A_d = rotirea spre dreapta, A'_s, A'_d = rotirile similare, dar cu corpul butoiului sus (fig. 131), plecînd însă și revenind în poziția din figura 130; B_s, B'_s, B_d, B'_d notează rotirile corespunzătoare ale cercului B.

Algoritmul se bazează pe utilizarea adecvată a „operatorilor"

$$X = (A'_s\, B_s\, A'_d\, B_d)^2$$
$$Y = B'_d\, X\, B'_s$$

(Exponentul 2 indică repetarea secvenței din paranteză.) Efectul primului operator este indicat în figura 132. Restaurarea se poate face astfel: plasăm prin tatonări cinci bile colorate diferit la bazele celor cinci coloane; plasăm apoi cele trei bile negre în vîrful coloanelor cu cîte cinci locuri (se aduc mai întîi la etajul 4, apoi sînt urcate și mai sus aplicînd B_d sau B'_d). Folosind operatorul Y se completează acum etajul de deasupra al zonei B, corespunzător celor cinci bile de bază. În sfîrșit, cele două etaje de mijloc sînt restaurate împreună, folosind operatorul X, eventual inversul lui, $(B_s\, A'_s\, B_d\, A'_d)^2$.

Cîteva cuvinte despre o jucărie românească din această familie, un mic cilindru de plastic, cu patru coloane de cîte patru bile colorate. Una dintre coloane poate conține cinci bile (dispunem deci de un loc gol). Există cinci etaje, cinci cercuri de lățimea unei bile, care pot fi rotite liber. Bilele de fiecare culoare sînt identice, nu sînt folosite degradeuri ca la turnul Babilon. Totul de dimensiunile unui breloc. Realizat cu grijă, foarte plăcut la manevrare.

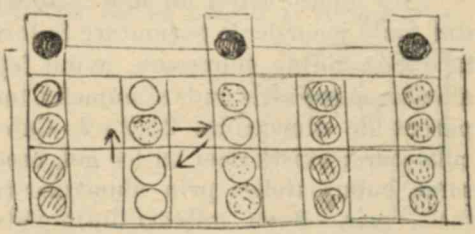

Fig. 132

Bănuiți cîte configurații ale bilelor sînt posibile? Să le evaluăm. Dacă ne gîndim la toate modurile de aranjare a celor 16 bile, obținem peste 200 de miliarde de posibilități (16-factorial). Între acestea am socotit însă și toate permutările între ele ale bilelor de aceeași culoare. Există 24 asemenea permutări (4-factorial). Trebuie deci să împărțim numărul inițial la 24^4 (patru culori), apoi la 4, pentru a elimina variantele rezultate prin rotirea întregului joc cu o coloană sau alta spre noi. Rămîn 15 765 750 de configurații diferite. Cincisprezece milioane! N-ați crede, ținînd în mînă jucăria, așa mică și simplă cum pare...

Din fericire (sau poate din păcate), rezolvarea este teribil de ușoară. Schimbînd locul gol cu fiecare bilă în parte, fiecare bilă poate fi adusă la locul ei dintr-o singură mutare (o mutare constînd deci din rotirea a două „jumătăți" ale cilindrului, împingerea unei bile în locul gol și rotirea inversă, pentru a păstra restul bilelor neschimbate). Eventual cu o mutare în plus, spre final, dacă coloana cu cinci locuri este completată înaintea altora (trebuie să aducem o bilă aici, pentru a crea un loc în altă parte).

Ținînd seama că inițial putem conta pe existența a cel puțin patru bile aflate în coloanele în care trebuie să ajungă (cîte una sau chiar mai multe în fiecare coloană) — ordinea culorilor nu contează — rezultă că în cel mult 13 mutări cilindrul poate fi restaurat. Este acest număr optim? Probabil că nu și este o problemă interesantă găsirea numărului minim de mutări necesare pentru a restaura cilindrul, *plecînd din orice configurație inițială*. Aveți vreo idee?

5.11. Cubul cu buline

Este numit astfel un mic „monstru" colorat, așa cum sînt toate jocurile de permutare (a fost produs de RECOOP în 1984). Șapte cubușoare, avînd fețele marcate cu buline albastre și roșii (de unde și numele), închise într-un cub transparent de dimensiuni $2 \times 2 \times 2$. Cubul are volumul de opt cubușoare; există deci un loc gol, ceea ce face posibilă deplasarea cubușoarelor, prin alunecare (aplecînd cubul), astfel încît, prin cîteva mișcări întîmplătoare, bulinele dinspre

exterior ajung „pestrițe" (așa cum probabil ați cumpărat de fapt jocul, el fiind livrat „nerezolvat"). Evident, problema care se pune este uniformizarea culorilor dinspre exterior, colorarea tuturor fețelor cubului fie în roșu, fie în albastru.

Este posibil acest lucru? În ce fel? Atenție, avem două probleme aici: una referitoare la culoarea roșie și una referitoare la cea albastră. Pentru a nu abuza de răbdarea cititorului (și spre binele celor care încă mai încearcă să coloreze cubul în roșu...), voi anunța de la început că numai problema „albastră" are soluție! Motivul ține de... algebră și afirmația este similară celor care au fost demonstrate mai devreme pentru cubul lui Rubik și sfera lui Varga.

Iată, să presupunem că jocul a fost rezolvat, cu fețele albastre (voi da mai jos o metodă simplă pentru a realiza acest lucru). Fiecare cubușor are cîte trei fețe roșii și cîte trei fețe albastre, deci fiecare are locul lui bine stabilit, atît în varianta „roșie", cît și în cea „albastră". În particular, locul gol are o poziție bine stabilită în ambele variante ale problemei. Să numerotăm cubușoarele ca în figura 133, incluzînd în numerotare și locul gol, căruia îi dăm numărul 1. Dacă am reușit să colorăm în roșu toate fețele cubului, atunci locul gol ar trebui să ajungă în locul cubușorului 7, deoarece, pentru a trece de la colorarea albastră la cea roșie, fiecare cubușor ar trebui mutat pe diagonala cubului. Cu alte cuvinte, cubușoarele (inclusiv locul gol) trebuie schimbate între ele două cîte două. Avem în total patru perechi, deci patru asemenea interschimbări (transpoziții, în termenii algebrei permutărilor). Cele două permutări care ne interesează — cea „albastră" și cea „roșie" — au deci aceeași paritate. Mișcările regulamentare nu fac însă decît să schimbe între ele locul gol și un cubușor vecin și aceasta se întîmplă de-a lungul unei muchii a cubului. Pentru a duce locul gol din poziția 1 în poziția 7 avem nevoie de trei asemenea mișcări (mai exact, într-un șir de mișcări care realizează acest lucru trebuie să existe trei mișcări nepereche, restul putînd fi aranjate în

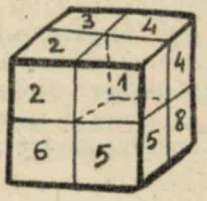

Fig. 133

perechi care deplasează locul gol pe aceeași direcție, dar în sensuri contrare). Fiecare mutare realizează o transpoziție. Trei mutări nepereche înseamnă un număr impar de transpoziții. Orice configurație obținută din cea albastră și având locul gol pe poziția 7 corespunde deci unei permutări impare a cubușoarelor. Da, dar am văzut mai sus că configurația roșie este pară (la fel ca cea albastră). Contradicție. De la configurația albastră nu se poate trece la cea roșie prin mutări regulamentare (poate doar desfăcînd jocul...).

Să căutăm acum un algoritm de restaurare (pentru problema „albastră" deci). Să observăm de la început că dacă piesele 5,6,7 și 8 ar fi aduse la locul lor, atunci problema ar fi rezolvată, deoarece, după ce aducem locul gol pe poziția 1, piesele 2,3, 4 nu se pot afla altfel decît sau la locul lor, sau permutate circular (altfel, permutarea ar fi impară, ceea ce e imposibil). O permutare circulară este ușor de realizat, operînd numai la etajul superior al cubului.

Prima problemă este deci identificarea etajelor (a poziției în care trebuie să se găsească în final locul gol): aplecăm cubul, încercînd să vedem pentru care dintre colțuri nu există o piesă cu fețele albastre orientate potrivit.

În cele ce urmează vom presupune totdeauna că ținem cubul în mînă ca în figura 133 (cu etajele identificate și cu locul gol pe poziția 1). Pentru a codifica algoritmul de restaurare, să notăm, cu f, d, s, p mișcarea care corespunde aplecării spre noi, spre dreapta, spre stînga și, respectiv, spre spate a cubului. Atenție, această aplecare presupune doar schimbarea locului gol cu cubușorul aflat pe direcția în cauză, nu rotirea întregului cub. Rotirea cubului cu 90° spre noi, spre dreapta, spre stînga și, respectiv, spre spate, se notează cu F, D, S, P (această rotire nu presupune și mișcarea pieselor).

Să remarcăm că o „formulă" care ar duce piesa 2 în 6 fără a face alte modificări în etajul de jos ar fi de a ajuns. Într-adevăr, oricare dintre piesele de sus poate fi adusă ușor pe poziția 2, iar dacă pe poziția 6 ar trebui adusă o piesă care deja se găsește în etajul de jos, o putem scoate mai întîi de acolo, aducînd în locul ei o piesă oarecare, tot prin formula respectivă, și apoi o deplasăm deasupra poziției 6.

Această unică formulă, suficientă (împreună cu puțină atenție) pentru restaurarea cubului cu buline este

$$f\ S\ s\ p\ P\ p\ d\ f\ s\ F\ f\ d\ D\ p$$

Ea realizează permutarea circulară 2→6→4→2, deci exact cea ce dorim.

„Monstrul" nu este chiar atît de primejdios, chiar dacă pe el sînt posibile 8-factorial configurații, adică 40320 de permutări distincte (dintre care însă numai 7-factorial-supradoi = 2520 au locul gol pe poziția potrivită). Cu condiția totuși să nu ne propunem să ajungem în configurația cu fețele colorate în roșu...

Bineînțeles, pot fi imaginate și variante mai mari ale jocului, în primul rînd de dimensiuni 3 × 3 × 3. Trecerea de la 2 la 3 complică însă neașteptat de mult lucrurile, deoarece aranjarea etajului de sus nu mai rămîne o chestiune banală, ca la cubul 2 × 2 × 2, ba dimpotrivă, deoarece aranjarea acestui etaj cere proceduri care să lase neschimbate primele etaje (după ce le-am restaurat).

5.12. Cascada

Și acesta este tot un produs al RECOOP-ului. La prima vedere, mai mult o jucărie decît un joc: se dau mai multe piese paralelipipedice, colorate frumos în roșu, galben, albastru și verde, de trei tipuri diferite ca dimensiuni (le-am notat cu *A*, *B* și *C* în figura 134; dimensiunile din figură au luat ca unitate grosimea acestor piese). În pliantul care însoțește jocul RECOOP sîntem îndemnați fie să așezăm aceste piese în picioare, apropiate, în linii șerpuite, și apoi să le împingem pentru a cădea una peste alta, „în cascadă", fie să realizăm diferite construcții decorative, dreptunghiuri colorate, căsuțe, piramide etc. „Jocuri distractive, pentru copiii de la 3 la 7 ani", după cum scrie pe cutie.

Cu piesele „cascadei" putem însă să ne „jucăm" la orice vîrstă, deoarece asupra lor pot fi formulate o serie de probleme logice deosebit de interesante. De exemplu, să ignorăm grosimea pieselor și să ne propunem să realizăm cu ele pătrate de diferite dimensiuni. Este posibil acest lucru, pentru o dimensiune dată? Evident problema trebuie abordată altfel decît prin încercări. Matematica ne scoate din nou din încurcătură.

În primul rînd, este clar că pătratele căutate trebuie să aibă latura de lungime cel puțin 6. Iar un pătrat 6 × 6 poate fi realizat din două piese *A* sau din trei piese *B* sau din patru piese *C*. Pe de altă parte, orice pătrat cu latura multiplu de

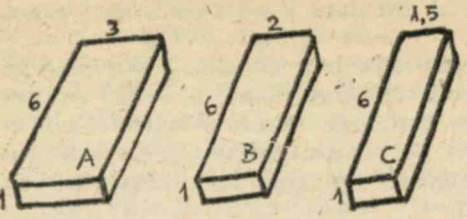

Fig. 134

6 poate descompus în pătrate 6 × 6, deci și acestea pot fi acoperite. Ce facem cu pătratele de latură 7, 8, 9, 10 etc.? O observație imediată ne scutește de multe eforturi: suprafața pieselor *A*, *B*, *C* este de 18, 12 și, respectiv 9. Toate aceste numere sînt divizibile la 3, deci orice combinație a lor este divizibilă la 3. Pătratele a căror latură nu este multiplu de 3 nu sînt deci realizabile. Un prim rezultat pe care îl reținem. Să considerăm acum un pătrat cu latura număr impar. Suprafața lui va fi tot impară. Piesele *A* și *B* au suprafața pară. Rezultă că trebuie să folosim un număr impar de piese *C*. Un număr impar de piese de tip *C* presupune că există o direcție pe care intervine un număr impar de lățimi de piese *C*. Să nu uităm însă că lățimea piesei *C* este 1,5. Dimensiunile celorlalte piese sînt numere întregi. Pe direcția respectivă, totalul dimensiunilor pieselor implicate este un număr fracționar, ceea ce contrazice faptul că pătratul are laturi de lungime egală cu un număr întreg. Nici un pătrat cu latura impară nu este realizabil.

În concluzie, pătratele realizabile trebuie să aibă latura multiplu și de 2 și de 3, deci multiplu de 6. Toate aceste pătrate sînt realizabile și numai ele. Problema este complet rezolvată.

Să revenim la dreptunghiuri, complicînd însă problema: folosind numai piese de tip *A* (dominouri, de fapt), pot fi realizate dreptunghiuri în care să nu existe „tăieturi" (linii orizontale sau verticale care să unească două laturi opuse, „linii slabe", cum ar spune zidarii)? Deoarece lucrăm numai cu piese de tip *A*, să le considerăm de dimensiuni 1 × 2 (ignorăm în continuare grosimea), evaluînd deci laturile dreptunghiurilor căutate în lățimi de piesă. Problema, dificilă la prima vedere, are totuși soluții, cele mai mici referindu-se la dreptunghiuri 5 × 6. Un exemplu este dat în figura 135.

Evident, dreptunghiurile cu o dimensiune 2 sau 3 nu pot satisface această cerință. Și nici cele cu 4: oricum am începe

de la un capăt să acoperim acest dreptunghi, fie realizăm o linie dintr-o parte în alta, fie... prelungim dreptunghiul la infinit. Un pătrat 5×5 nu poate fi realizat deoarece conține un număr impar de jumătăți de dominouri. Am ajuns astfel la 5×6, soluția minimă.

Nici pătratul 6×6 nu poate fi realizat fără tăieturi transversale. Iată demonstrația dată de S. Golomb acestei afirmații (vezi M. Gardner, *Alte amuzamente matematice*). Să presupunem că am realizat un pătrat 6×6 în care orice tăietură la distanța de 1, 2, 3, 4, 5 lățimi de piesă de o latură, fie ea orizontală sau verticală, taie cel puțin o piesă. Orice asemenea tăietură trebuie însă să taie cel puțin două piese. Într-adevăr, orice linie, verticală sau orizontală, ca mai sus, separă pătratul 6×6 în două dreptunghiuri de suprafețe de cîte 6, 12, 18, 24 sau 30 de pătrate fiecare. Numere pare deci. Dacă o singură piesă este tăiată de o linie, atunci cele două jumătăți ale sale rămîn în dreptunghiuri diferite, împreună cu un număr oarecare de piese întregi. O piesă are însă două pătrate. Ar urma că cele două dreptunghiuri au suprafețe cu un număr impar de pătrate. Contradicție.

Orice linie ca mai sus taie deci cel puțin două piese. O piesă poate fi tăiată cel mult o dată, vertical sau orizontal. Există cinci linii verticale și cinci orizontale, în total 10. Pe fiecare avem cel puțin cîte două piese tăiate; în total, cel puțin 20, deși pătratul 6×6 are aria 36, deci conține numai 18 piese! Contradicția arată că pătratul este nerealizabil, cel puțin o linie taie zero piese, deci este o linie slabă.

Pătratul 8×8 poate fi, în schimb, realizat din piese de tip *A*, fără linii care să-l împartă în dreptunghiuri, și acest lucru se poate obține ușor „prelungind" dreptunghiul din

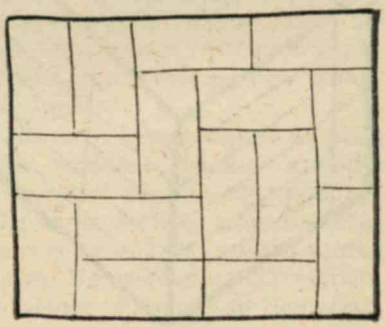

Fig. 135

figura 135, cu grija de a nu introduce linii slabe la marginea lui.

Pasul următor este, desigur, trecerea în spațiu. Construirea de cuburi în primul rînd. Din nou, cuburile cu latura multiplu de 6 pot fi realizate și acestea sînt singurele realizabile (demonstrația este identică celei din cazul pătratelor). În continuare, apare natural problema construirii de paralelipipede fără „tăieturi" (care nu pot fi separate în două paralelipipede mai mici). În figura 136 este indicată o soluție a problemei pentru paralelipipedul de dimensiuni $6 \times 7 \times 9$ (am revenit la unitatea de măsură egală cu grosimea pieselor); sînt folosite 21 de piese de tip *A*. Acesta este cel mai mic paralelipiped de acest tip: volumul paralelipipedului trebuie să fie divizibil la 9 și nu putem avea două laturi egale cu 6, deci cel puțin una trebuie să fie 9. Care este următorul paralelipiped realizabil fără tăieturi (următorul ca volum)? Problema rămîne în seama cititorului. Ca și inventarea altor încercări similare, deoarece „cascada" problemelor sugerate de jocul „Cascada" este, iată, deosebit de bogată. (De exemplu, ce se poate spune despre problemele formulate mai sus numai pentru piese de tip *A* atunci cînd le formulăm pentru piese de tip *B* sau pentru piese de tip *C*?)

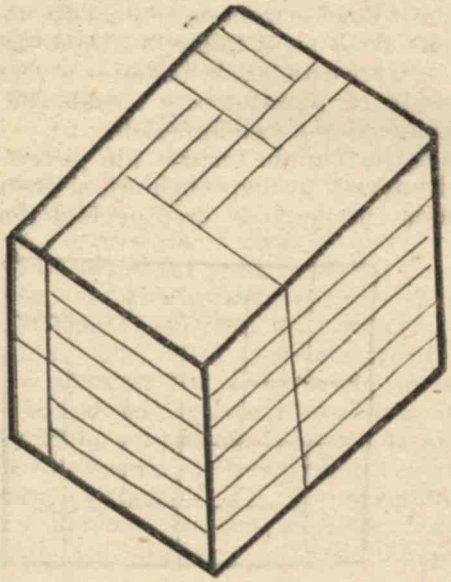

Fig. 136

6.1: Itinerare pe tabla de șah

Tabla de șah, suportul unui joc prin excelență logic, a constituit subiectul multor probleme de... logică. Să ne amintim de subcapitolul despre poliominouri și de apariția esențială acolo a cîmpului cu 64 de pătrate. Dintre problemele de acest gen, o clasă aparte o constituie cele de *itinerare*, în care o piesă precizată trebuie să parcurgă anumite drumuri. Exemplul cel mai cunoscut este *problema calului lui Atila*, cel care pîrjolește locul unde calcă, drept care nu mai poate trece a doua oară pe acolo: să se mute un cal astfel încît să se parcurgă întreaga tablă, trecînd o singură dată prin fiecare căsuță. Nu insist aici asupra acestei probleme; în numeroase locuri sînt date soluții, chiar răspunzînd unor cerințe suplimentare (drumuri închise, cu anumite simetrii etc.).

Există însă multe alte probleme similare. În primul rînd, să modificăm problema anterioară: să parcurgem întreaga tablă, trecînd cîte o singură dată prin fiecare cîmp, plecînd dintr-un colț și terminînd în colțul opus. În cît timp puteți găsi o soluție a acestei probleme? Răspunsul pe care sper că-l veți da este: *niciodată*, deoarece problema nu are soluție. Justificarea este imediată. Pentru a parcurge toată tabla, calul va face 63 de mutări. La fiecare mutare el schimbă culoarea cîmpului în care se află. După 63 de sărituri, el se va afla deci într-o căsuță de culoare opusă culorii căsuței de plecare. Ceea ce face imposibilă satisfacerea restricției suplimentare: colțurile opuse ale tablei, indiferent pe care dintre cele două diagonale, au culori identice.

Calul este însă numai una dintre cele șase tipuri de piese de șah. Cum sună problemele similare pentru celelalte piese? De la început trebuie eliminați din discuție pionii și nebunii, deoarece aceștia nu au acces decît la anumite părți ale tablei (primii la coloana pe care se află, iar ceilalți numai la pătratele de o singură culoare). De asemenea, este evident că un itinerar al turei poate fi urmat și de rege și de regină,

dar nu şi invers. Pe de altă parte, un drum al turei care să treacă o singură dată prin fiecare căsuţă este foarte uşor de găsit, de aceea trebuie să impunem condiţii suplimentare pentru ca problema să devină tentantă. Prima condiţie care se oferă atenţiei noastre este aceea de a obţine un drum închis. Şi această încercare este uşor de trecut. În figura 137 este dată o soluţie care sugerează o încercare şi mai grea: drumul căutat să aibă cît mai puţine întoarceri (unghiuri). Itinerarul anterior are 20 de asemenea puncte de schimbare a direcţiei. Care este numărul minim posibil? Un drum cu 16 întoarceri este dat în figura 138 şi unul mai bun nu pare uşor de găsit.

În realitate, nici nu există un drum cu mai puţin de 16 unghiuri drepte, iar raţionamentul care justifică această afirmaţie este foarte simplu. Să considerăm o linie sau o coloană oarecare a tablei. Dacă pe ea există o schimbare de direcţie a unui intinerar dat, atunci există cel puţin încă o schimbare (de fapt, numărul schimbărilor de pe o linie sau coloană trebuie să fie par). Deci, dacă nu 16 este numărul minim de întoarceri, atunci nici 15 nu poate fi. Dacă avem cel mult 14 întoarceri, atunci există cel puţin o linie sau o coloană care nu conţine nici o întoarcere (altfel ar apare $2 \times 8 = 16$ întoarceri). Să presupunem că într-un caz dat am identificat o asemenea linie. Atunci itinerarul în cauză trece perpendicular peste ea, pe fiecare dintre cele opt coloane ale tablei, deci pe fiecare dintre coloane există cel puţin cîte două întoarceri, deci itinerarul are cel puţin 16 unghiuri drepte

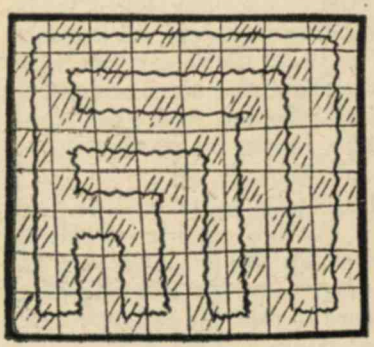

Fig. 137

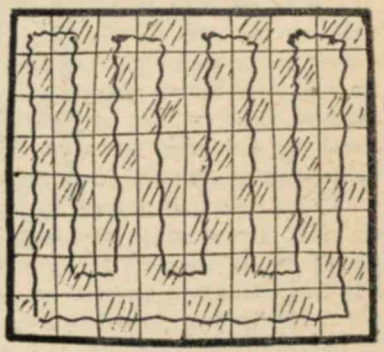

Fig. 138

(nu cel mult 14, cum am presupus). Ceea ce trebuia demonstrat, ca să folosesc din nou această expresie din limbajul matematicienilor.

Bineînțeles, există și alte soluții ale problemei anterioare, cu numai 16 schimbări de direcție. Una dintre ele răspunde unei vechi probleme a lui Sam Loyd (reluată de M. Gardner în volumul *Mathematical puzzles of Sam Loyd*, Dover, 1959). Este vorba — în termenii lui Loyd — de planificarea unei parade militare într-un parc de forma unei table de șah și în care se poate intra și ieși prin două porți alăturate, astfel încît să se facă un număr cît mai mic de întoarceri la stînga sau la dreapta și să se treacă și pe sub un arc de triumf plasat ca în figura 139. În figura 140 este dată soluția lui Loyd, unica spune el avînd 14 întoarceri (unind capetele itinerarului, obținem un drum închis, cu 16 întoarceri).

Pînă acum ne-au interesat itinerare închise ale turei, care să treacă prin toate pătratele tablei de șah și să facă numărul *minim* de schimbări de direcție. Pare însă a fi interesantă și problema inversă: să căutăm drumurile cu cele *mai multe* întoarceri. Care este acest număr? Drumul din figura 141 face nu mai puțin de 52 de unghiuri drepte. Își imaginează cititorul unul cu și mai multe întoarceri? Pentru a-l mobiliza, îl anunț că în figura 142 va găsi un asemenea drum cu 56 de schimbări de direcție (și este plauzibil că nu pot fi găsite

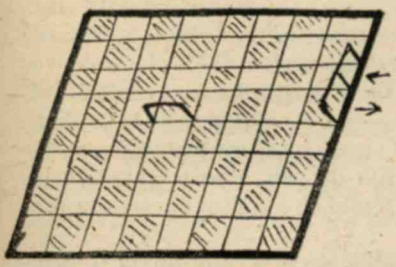

Fig. 139

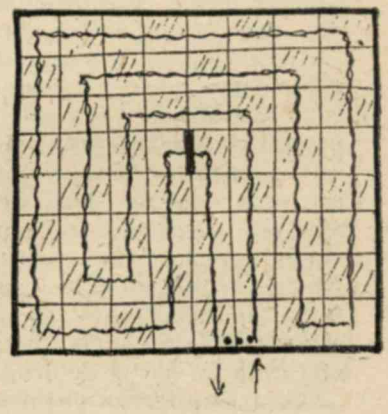

Fig. 140

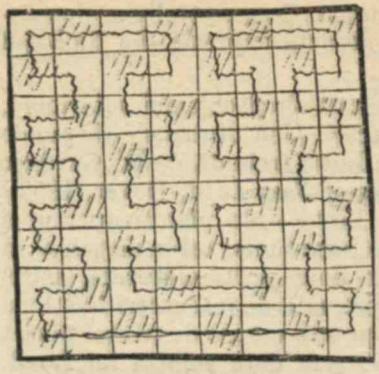

Fig. 141

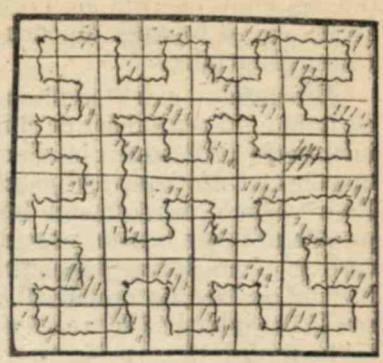

Fig. 142

drumuri cu și mai multe întoarceri, deși afirmația nu pare a fi ușor de demonstrat).

Să lăsăm însă turele și să trecem la piese mai importante! Direct la rege! Libertatea acestuia de a se mișca și pe diagonală conduce la posibilitatea găsirii de itinerare care să treacă prin toate pătratele tablei și să facă exact 64 de întoarceri (fig. 143). De data aceasta, problema numărului maxim de întoarceri devine prea simplă pentru a fi interesantă. Există însă o complicare aproape monstruoasă a ei: ținînd seama că regele nu face decît „pași" minimali, de la o căsuță la alta, să numerotăm mișcările sale și să căutăm un itinerar închis care să treacă prin toate pătratele tablei și să... realizeze un pătrat magic 8×8 din numerele de ordine ale mutărilor!... Nemărginită este perseverența omului (sau poate șansa lui în rezolvarea unor astfel de probleme): s-au găsit într-adevăr asemenea itinerare „magice", iar figura 144 prezintă o soluție a problemei, soluție care are încă o calitate: este „simetrică" în raport cu axa verticală a tablei, în sensul că suma oricăror două numere simetrice față de această axă este constantă și anume, 65. Constanta acestui pătrat magic (suma pe linii, pe coloane sau pe diagonale) este 260. Nu cunosc nici un pătrat magic similar obținut prin numerotarea săriturilor unui cal pe tabla de șah. Poate că cititorul este mai inspirat și găsește un asemenea itinerar (presupunînd că există un astfel de drum).

Să mai zăbovim puțin pe tabla de șah, dar nu la o problemă de itinerare, ci pentru a degusta un alt gen de întil-

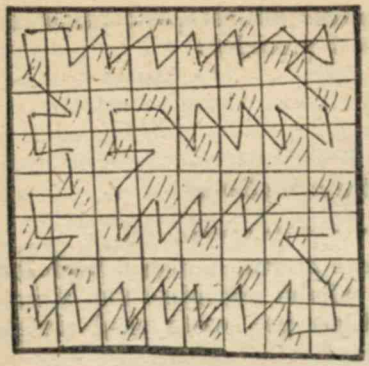

Fig. 143

61	62	63	64	1	2	3	4
60	11	58	57	8	7	54	5
12	59	10	9	56	55	6	53
13	14	15	16	49	50	51	52
20	19	18	17	48	47	46	45
21	38	23	24	41	42	27	44
37	32	39	40	25	26	43	28
36	35	34	33	32	31	30	29

Fig. 144

nire cu matematica. În teoria limbajelor formale („floarea științei calculatoarelor") există o noțiune de mare interes și frumusețe, limbajele *Thue*, imaginate de matematicianul Axel Thue încă de la începutul secolului și care au o justificare șahistă de mare importanță: este posibil ca o partidă de șah să continue la nesfîrșit fără să repete vreodată de trei ori consecutiv o secvență de mutări (poziții)? În termeni de limbaje: cu simbolurile unui alfabet finit (pozițiile posibile pe tabla de șah) putem forma cuvinte oricît de lungi, dar care să nu conțină repetări adiacente (de mai mult de două ori, sau chiar de un număr k de ori, k precizat)?

Răspunsul este afirmativ: există asemenea cuvinte (numite *cuvinte Thue*), chiar formate cu elementele unui alfabet de numai două litere. Iată un exemplu. Să luăm literele a și b și să considerăm substituția

$$a \to ab \qquad b \to ba$$

Plecînd de la cuvîntul ab și folosind de cîte ori dorim substituția anterioară (înlocuind de fiecare dată fiecare apariție a lui a cu ab și fiecare apariție a lui b cu ba), vom obține cuvinte de lungime oricît de mare, fără *trei* repetări adiacente. Demonstrația acestui fapt nu este deloc ușoară. (Într-o recentă carte a lui A. Salomaa, *Bijuterii ale teoriei limbajelor formale*, Computer Science Press, 1981, sînt dedicate aproape patru

pagini acestei demonstrații.) Pentru verificare, să considerăm primele șiruri Thue date de acest procedeu:

a b
a b b a
a b b a b a a b
a b b a b a a b b a a b a b b a
.....

Lungimea acestor șiruri crește precum numărul boabelor de grîu cerute de inventatorul șahului mărinimosului și imprudentului împărat care l-a lăsat pe acesta să-și aleagă răsplata dorită...

Pot deci exista partide de șah care nu se termină niciodată, dar nici nu repetă de trei ori consecutiv o poziție dată. De pildă, să considerăm o tablă redusă, 3 × 3, pe care să distingem următoarele poziții: *a* = un rege la a1 și unul la c3, *b* = un rege la a2 și unul la c2, *c* = un rege la b1 și unul la b3, *d* = un rege la a3 și unul la c1. Este clar că prin mutarea celor doi regi se poate trece din poziția *a* în *b*, din *a* în *c*, din *b* în *d*, precum și invers, de fiecare dată (alte piese nu există). Să luăm acum un șir Thue *abbabaabbaa...* și să introducem în fiecare pereche *aa* un simbol *c*, iar în fiecare pereche *bb* un simbol *d*. Șirul obținut, *abdbabacabdbaca...*, descrie o „partidă" infinită în care nu se repetă vreo poziție nici măcar de două ori consecutiv.

De remarcat că regulamentul actual al jocului de șah prevede încheierea partidei prin remiză la repetarea de trei ori a unei poziții *indiferent dacă repetarea este consecutivă sau nu* (precum și după 50 de mutări prin care nu se capturează nici o piesă și nici nu se mută vreun pion).

6.2. Șiruri și pătrate de dominouri

Niciodată în reală vogă, dar niciodată uitat cu totul, simplu ca regulament și destul de sărac din punct de vedere strategic, atractiv totuși prin înfățișarea și prin implicarea hazardului în desfășurarea sa, *Domino*-ul se pare că este la fel de „bătrîn" ca șahul, moara și alte jocuri competiționale de mare reputație. Originea sa este complet necunoscută, în ciuda rezonanței latine a numelui, căpătat probabil în

Evul Mediu, după răspîndirea în Europa (vezi *Encyclopedie Larousse, Méthodiques*, vol. 2, 1952 și E. Lucas, *Recréations mathématiques*, vol. 2, 1960).

Alcătuirea propriu-zisă a jocului este simplă: 28 de piese dreptunghiulare, de două ori mai lungi decît late, avînd marcate pe fiecare dintre cele două jumătăți de la zero la șase puncte, în toate combinațiile posibile. Există exact 28 de asemenea combinații: 0—0, 0—1,..., 0—6, 1—1, 1—2,..., 1—6, 2—2,..., 5—6, 6—6.

Nu despre jocul *Domino* ca atare o să vorbim însă aici, ci despre o serie de probleme ținînd de ceea ce se numesc de obicei „amuzamente matematice" și care au ca pretext piesele acestui joc (*dominourile* deci). Să reținem totuși scopul și regula de bază a tuturor variantelor jocului: se formează un șir de piese puse cap la cap (eventual alăturîndu-se pe o jumătate din lungime, ceea ce este neesențial pentru discuția care urmează) în așa fel încît jumătățile alăturate ale oricăror două piese vecine să fie marcate cu același număr de puncte.

Această regulă sugerează o serie de probleme privind înlănțuirea pieselor. Iată cîteva dintre ele:

P1. Pot fi așezate toate cele 28 de piese într-un șir? (Un șir corect în raport cu regula anterioară, desigur.)

P2. Dar într-un „inel"?

P3. Scoțind la întîmplare o piesă, putem realiza un șir cu cele 27 de piese rămase? (Dar un „inel"?)

Voi satisface de la început curiozitatea cititorului, informîndu-l că toate cele trei probleme au răspunsul afirmativ, în timp ce întrebarea din paranteză (tocmai de aceea e în paranteză...) are răspunsul afirmativ numai atunci cînd piesa eliminată este o „dublă" (0—0, 1—1 etc.). Mai mult, există 7 959 229 931 520 de soluții ale problemei *P1* și 129 976 320 de soluții ale problemei *P2*. Am consemnat aceste numere mai ales pentru a aminti că ele au fost calculate într-un articol de aproape 60 de pagini, publicat în anul 1871 de M. Reiss în „Annali di Matematica Pura ed Applicata", Milano.

Nu voi aborda cele trei probleme pe rînd, deoarece ele sînt strîns dependente una de alta. Într-adevăr, să observăm că fiecare cifră de la zero la șase este reprezentată de cîte opt ori pe cele 28 de piese: de două ori pe o „dublă" și de șase ori în compania celorlalte cifre. Pe de altă parte, în interiorul unui lanț corect de dominouri, fiecare cifră apare

în perechi de piese, prin urmare, dacă reuşim să formăm un şir cu toate cele 28 de piese, atunci el începe şi se termină cu aceeaşi cifră (altfel cifrele de la capete ar apărea de un număr impar de ori în şir, ceea ce este imposibil). Cu alte cuvinte, orice şir, soluţie a problemei *P1*, poate fi „închis" pentru a forma o soluţie a problemei *P2*. Dintr-un inel, soluţie a problemei *P2*, se poate apoi scoate orice piesă şi se obţine o soluţie a problemei *P3*. Dacă piesa scoasă nu este o „dublă", atunci lanţul obţinut astfel nu se mai poate închide; dacă scoatem o „dublă", atunci se poate realiza un inel şi cu cele 27 de piese rămase.

Interesant este aici faptul că, din cauza numărului par de apariţii ale cifrelor în cele 28 de piese, oricare ar fi piesa scoasă în problema *P3*, dacă ea nu este o „dublă", atunci lanţurile care se pot forma cu celelalte 27 de piese încep şi se termină cu valorile înscrise pe piesa eliminată. În felul acesta, putem „ghici" totdeauna cu ce începe şi se termină lanţul, chiar dacă el este realizat pe ascuns de o persoană pe care intenţionăm s-o „impresionăm" astfel...

Găsirea unuia dintre cele aproape opt mii de miliarde de lanţuri posibile se poate face prin încercări, sau urmînd proceduri sistematice (prelungim un lanţ cît este posibil, apoi, din piesele rămase, realizăm lanţuri oricît de scurte care au capetele marcate identic, intercalăm aceste lanţuri în lanţul iniţial — este posibil acest lucru — şi continuăm pînă la epuizarea pieselor). Pentru cititorul mai puţin răbdător, un lanţ gata format (aşezat, din motive pe care le voi dezvălui imediat, sub forma unui pătrat) este dat în figura 145.

Să privim lanţul-pătrat din această figură şi să numărăm punctele care apar pe fiecare latură. Găsim cîte 44 de puncte pe latura de sus şi pe cea din stînga, 32 de puncte pe latura din dreapta şi 59 de puncte jos. Apare firesc întrebarea: nu s-ar putea aranja piesele în aşa fel încît să existe cîte 44 de puncte pe fiecare latură? Dar — să zicem — cîte 59 de puncte?

Să observăm de la început că pe cele 28 de piese sînt înscrise în total 168 de puncte, iar pe cele patru laturi ale pătratului pe care vrem să-l construim apar $44 \times 4 = 176$ de puncte! Eroare? Da şi nu, deoarece în pătrat am numărat de două ori punctele de la colţuri, o dată pe laturile verticale şi o dată pe cele orizontale. Aceasta este şi cheia pro-

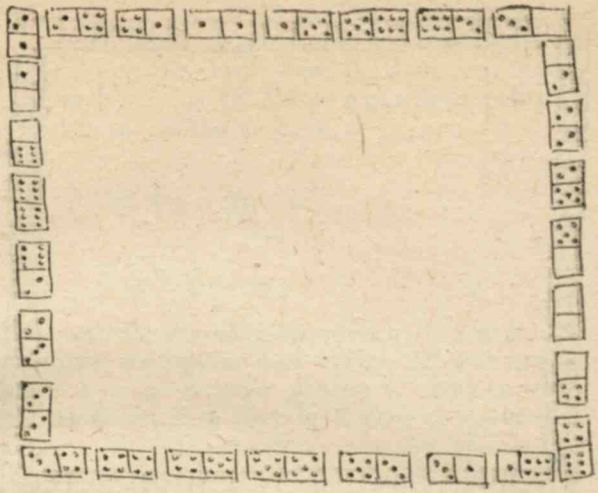

Fig. 145

blemei: pătratul pe care vrem să-l construim trebuie să aibă 8 puncte la colțuri. Putem acum alege o combinație de piese de colț care să realizeze o descompunere a lui 8 și să încercăm să completăm pătratul, plecînd de la aceste restricții. Iată un astfel de pătrat (fig. 146), bazat pe descompunerea $8 = 4 + 2 + 2 + 0$.

Evident, orice asemenea pătrat trebuie să aibă cel puțin 42 de puncte pe o latură (zero puncte la colțuri) și cel mult 48 (cîte șase puncte la fiecare colț), deci nu putem obține pătrate cu... 59 de puncte pe o latură. Sînt însă posibile toate pătratele avînd cîte 42, 43, ..., 48 de puncte pe o latură? Nu știu, dar presupun că da, ținînd seama de numărul mare al răspunsurilor la problema *P2*.

În pătratul din figura 146 am folosit toate cele 28 de piese ale jocului. Să considerăm și pătrate mai mici, ba chiar pe cele mai mici posibil. Acestea sînt formate din cîte patru piese. Un exemplu cu cîte 11 puncte pe fiecare latură este dat în figura 147.

De remarcat însă că acest pătrat nu este „corect" în sensul regulamentului jocului *Domino:* piesele vecine nu au același număr de puncte pe jumătățile adiacente. Nu există însă nici un pătrat format din patru piese și care să respecte toate aceste cerințe. Pentru a vedea aceasta, să considerăm un pătrat ipotetic, format cu piesele $x-y$, $y-u$,

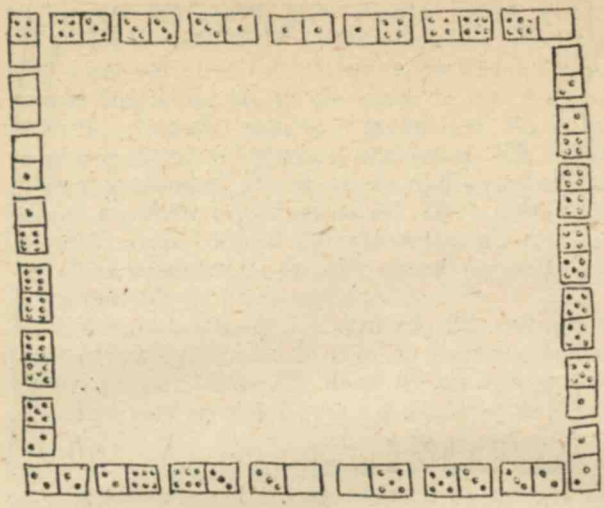

Fig. 146

$u-z$, $z-x$ (fig. 148). Fie t totalul pe fiecare latură a lui. Avem deci

$$\begin{aligned} x + 2y &= t \\ 2x + z &= t \\ 2z + u &= t \\ y + 2u &= t \end{aligned}$$

Adunînd aceste egalități, obținem

$$3(x + y + z + u) = 4t$$

Deoarece 4 nu este divizibil la 3, rezultă că t se poate împărți exact la 3 (primul membru al egalității este multiplu de trei, deci și al doilea trebuie să fie); t nu poate fi deci de-

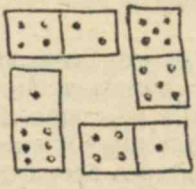

Fig. 147

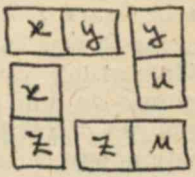

Fig. 148

cît unul din numerele 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18. Dacă două din numerele x, y, z, u sînt egale, atunci toate sînt egale. Într-un set de piese domino nu apar însă piese de două ori. Acest lucru elimină numerele 0, 3 și 18 dintre candidații pentru t și pe 6 dintre candidații pentru x, y, u, z.

Din egalitatea

$$2x + z = 2z + u$$

rezultă că

$$u = 2x - z.$$

Dacă $x = 5$, atunci fie $z = 2$ și atunci $u = 8$, fie $z = 5$, ceea ce este imposibil; nu putem deci obține $2x + z$ multiplu de trei pentru $x = 5$. Similar pentru 4: dacă $x = 4$, atunci fie $z = 1$ (deci $u = 7$...), fie $z = 4$, ceea ce iarăși este interzis.

Dacă $x = 3$, atunci fie $z = 0$ (ceea ce implică $u = 6$, o contradicție), fie $z = 3$ (altă contradicție); dacă $x = 2$, atunci fie $z = 2$ (interzis), fie $z = 5$, deci u are o valoare negativă. Consecințe similare se obțin pentru $x = 1$ și $x = 0$. Numărul x nu poate avea nici o valoare, deci soluția nu poate exista.

Trebuie deci să ne mulțumim cu pătrate ca acela din figura 147, fără alăturarea „regulamentară" a pieselor. În acest cadru, pot fi așezate toate cele 28 de piese în asemenea pătrate? (Realizînd deci șapte pătrate, fiecare cu același număr de puncte pe fiecare latură; bineînțeles, în pătrate diferite, laturile au sume diferite de puncte.) Deși problema pare dificilă la prima vedere, răspunsul este afirmativ și există chiar mai multe soluții. Iată pentru două dintre ele (împrumutate din cartea Y. Perelman, *Figures for fun*, Moscova, 1979) totalul punctelor de pe laturile pătratelor: (I) 3, 6, 8, 9, 9, 10, 16, (II) 4,4, 8, 10, 10, 12, 12. În figura 149 a și, respectiv, 149b, sînt indicate cîte trei pătrate din fiecare dintre aceste soluții.

Pătratele discutate pînă acum nu sînt „pline", se operează numai cu conturul lor. Următorul pas este considerarea de pătrate magice propriu-zise, în care se ia în seamă suma pe fiecare linie și coloană, precum și pe diagonale. Din păcate, nu se poate construi un pătrat plin (nici măcar nemagic) cu toate cele 28 de piese (suprafața lui ar trebui să fie de $28 \times 2 = 56$ de jumătăți de piesă, iar numărul 56

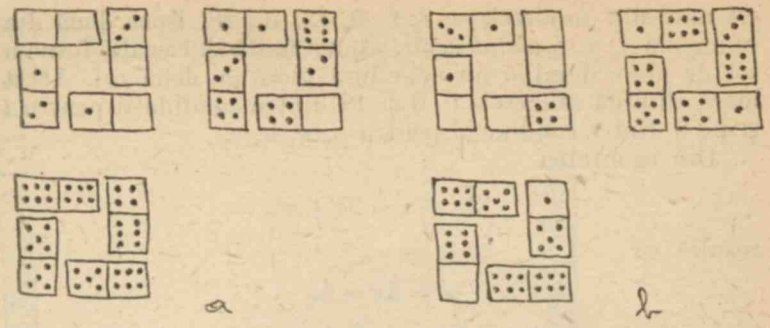

Fig. 149

nu este pătrat perfect). Trebuie deci să căutăm pătrate mai mici. Orice pătrat acoperit cu dominouri trebuie să aibă ca suprafață un număr par de jumătăți de piesă, deci nu putem forma pătrate pline cu 3, 5 sau 7 jumătăți de piesă pe o latură. Rămîne să căutăm pătrate cu cîte 2, 4, 6 jumătăți de piesă (deci formate cu 2, 8, respectiv, 18 piese). Pentru 2 problema nu are soluții (oricare două piese domino sînt diferite, deci cele două linii /coloane vor avea totaluri diferite. Un pătrat magic format din opt piese domino poate fi găsit în figura 150 (suma pe linii/ coloane/diagonale este 10), iar unul format din 18 piese este indicat în figura 151 (cu suma 18).

Putem aborda și o altă variantă a problemei: să se formeze pătrate magice care conțin piese ca elemente întregi de domino. De pildă, în figura 152 este desenat un asemenea pătrat, cu cîte 15 puncte pe fiecare linie, coloană și diagonală; mai mult, el folosește toate piesele care conțin cîte

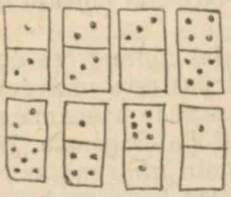

Fig: 150

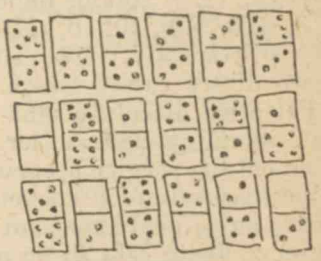

Fig. 151

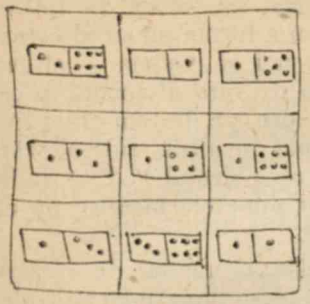

Fig. 152

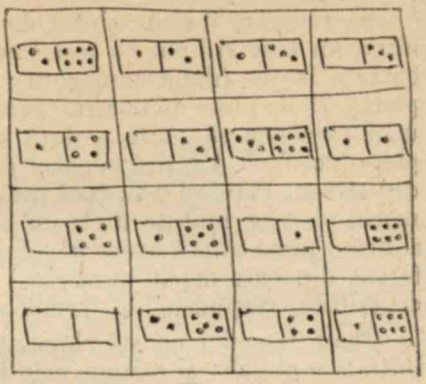

Fig. 153

un singur punct într-o jumătate a lor (împreună cu alte trei piese potrivite, desigur). Pătrate similare (de dimensiune 3×3) pot fi construite implicînd toate piesele care conțin pe zero, pe doi etc. Presupun că cititorul va încerca singur să găsească asemenea pătrate.

Bineînțeles, pătratele magice construite din piese domino nu pot fi mai mari de 5×5 (pătratele 6×6 ar cere 36 de piese). Atît pentru dimensiunea 4×4, cît și pentru dimensiunea 5×5 au fost găsite asemenea pătrate (vezi fig. 153 — suma 18 — și fig. 154 — suma 27).

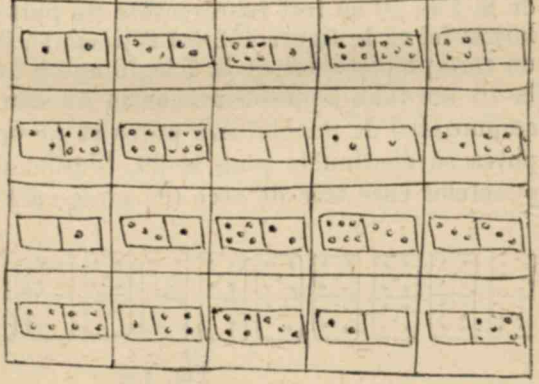

Fig. 154

Să revenim însă la șiruri de dominouri, pentru a examina un truc simplu cu asemenea piese. Așezăm pe masă, cu fața în jos (după cum vom vedea, nu tocmai la întîmplare), 25 de piese de domino pentru a forma un șir și cerem unei persoane să mute — fără ca noi să vedem — cîteva piese (cel mult 12) din capătul din dreapta al șirului în cel din stînga. Privind o singură piesă din șir, putem ghici numărul pieselor mutate dintr-un capăt în altul. Într-adevăr, ridicăm piesa aflată exact la jumătatea șirului (a 13-a, indiferent din care capăt numărăm) și punctele înscrise pe ea constituie răspunsul la problemă.

Cheia trucului constă, bineînțeles, în modul de așezare inițială a pieselor și anume, cele 13 piese din stînga sînt alese ca în figura 155, deci (de la dreapta la stînga) cu cîte 0, 1, ..., 12 puncte înscrise pe ele, iar cele 12 piese din partea dreaptă sînt puse la întîmplare. La început, piesa numărul 13 conține zero puncte, mutînd o piesă din dreapta în stînga, la mijloc va ajunge piesa cu un punct, mutînd două piese, la mijloc va ajunge piesa cu două puncte, și așa mai departe. Simplu, nu?

Jocul anterior este prezentat de B.A. Kordemski în *Matematica distractivă* (Edit. Tineretului, București, 1959) cu 25 de piese, dar el poate fi generalizat chiar la... mai multe piese decît conține un set de dominouri. Toată problema constă în a „scrie" numere cu ajutorul punctelor de pe piese. În figura 155 am „numărat" pînă la 12, dar se putea merge și mai departe, fără un efort deosebit de memorie. Să considerăm, de pildă, șirul din figura 156. Numerele de la 1 la 10 au fost reprezentate (în partea dreaptă a șirului) la fel ca în figura 155 (să reținem că de la 0 la 6 apare un zero pe piese, iar de la 7 la 10 apare un cinci). De la 11 la 16 am folosit piese care conțin un unu și un număr corespunzător de puncte. Am putea să ne oprim aici, sau am putea să continuăm pînă la 20, codificînd numai numărul punctelor care trec de zece (cu piese care nu conțin pe 5).

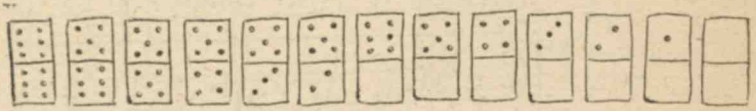

Fig. 155

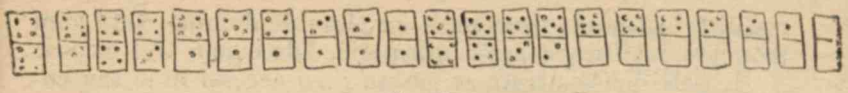

Fig. 156

Completăm la dreapta cu 20 de piese aşezate la întîmplare (folosim deci două seturi de piese) sau numai cu 16 dacă ne oprim la piesa 1—6. Pot fi deci mutate din dreapta în stînga cel mult 20 (respectiv, 16) piese şi totuşi piesa de la mijlocul şirului ne va spune imediat cîte.

Evident, trucul poate fi realizat şi cu cărţi de joc, punînd un joker pe post de zero şi un as a cărui culoare o memorăm în locul lui 11 (şirul va avea deci 29 de cărţi şi cel mult 14 pot fi mutate).

Iată şi o altă întîlnire interesantă între dominouri şi matematică (B.A. Kordemski, op. cit.): în figura 157, patru dominouri au fost aşezate în aşa fel încît să obţinem o înmulţire corectă (551 × 4 = 2 204). Problemă: să se aşeze după acelaşi model toate cele 28 de piese, astfel încît să se formeze şapte asemenea operaţii corecte.

Răspuns: se pot realiza (de pildă) înmulţirile: 500 × 2 = = 1 000, 223 × 5 = 1 115, 401 × 3 = 1 203, 415 × 4 = = 1 660, 633 × 4 = 2 532, 664 × 4 = 2 656, 554 × 6 = = 3 324.

Să ne amintim că în secţiunea 5. 12 am discutat o serie de probleme de acoperire a unor dreptunghiuri cu dominouri. După cum am văzut, pătratul 8 × 8 poate fi acoperit chiar fără a obţine o „linie slabă" (linii transversale). Am revenit astfel pe tabla de şah.

...Care nu mai poate fi însă acoperită dacă decupăm din ea două colţuri opuse, mai general, dacă decupăm două pătrate de aceeaşi culoare. Dacă din tabla de şah se scot însă două pătrate de culori opuse, indiferent de locul lor, atunci

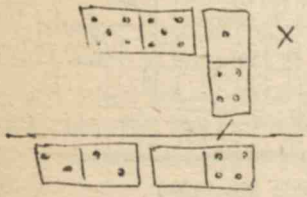

Fig. 157

restul tablei poate fi acoperit cu piese de domino. Iată cum se poate justifica această afirmație. Distingem trei cazuri:

1. Cele două pătrate se găsesc pe o aceeași linie sau coloană. Fiind de culori diferite, între ele există un număr par de pătrate. Le acoperim cu dominouri. Pătratele exterioare celor anulate se acoperă cu piese puse perpendicular pe linia sau coloana respectivă. Se poate completa astfel și o linie/coloană vecină. Restul liniilor/coloanelor sînt intacte, deci pot fi acoperite cu cîte patru piese (fig. 158).

2. Cele două pătrate se găsesc pe linii (coloane) diferite, separate de un număr par de linii (coloane). Pentru simplitate, discutăm cazul coloanelor. Pe coloanele din care s-a scos cîte un pătrat au rămas încă 7 pătrate distribuite de o parte și de alta a pătratului anulat. Evident, de o parte rămîne un număr par de pătrate, iar de partea cealaltă un număr impar. Mai mult, se poate observa că ambele numere pare de pe cele două coloane sînt de aceeași parte, deci sau amîndouă deasupra, sau amîndouă dedesubtul pătratelor anulate. În partea „impară" așezăm perpendicular pe coloane cîte o piesă, apoi completăm cele două coloane „de-a lungul". Coloanele aflate între ele se completează „de-a latul" — vezi figura 159.

3. Cele două pătrate se găsesc pe linii (coloane) diferite, separate de un număr impar de linii (coloane). Discutăm din nou cazul coloanelor. Acum pătratele neanulate de pe cele două coloane se plasează încrucișat: par — impar, atît deasupra cît și dedesubtul pătratelor anulate. La extremi-

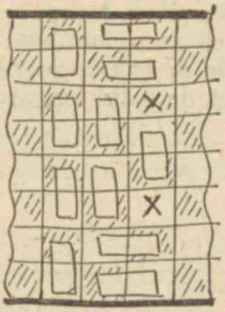

Fig. 158

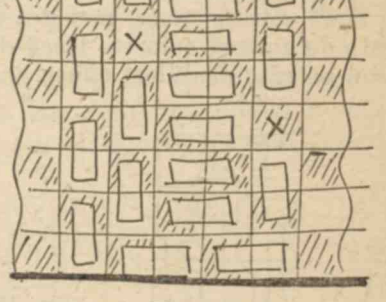

Fig. 159

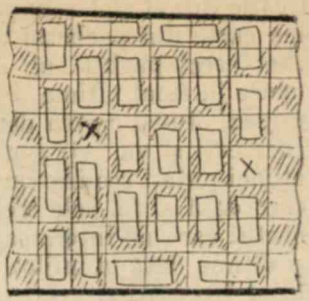

Fig. 160

tatea părților impare așezăm piese perpendiculare pe coloane, apoi toate coloanele se completează cu piese așezate „de-a lungul" (fig. 160). În toate situațiile, acoperirea este deci posibilă.

6.3. Trucuri matematice cu cărți de joc

Următoarea variantă mai simplă a „scamatoriei" pe care v-o propun circulă deja în folclorul jocurilor de societate: Se iau 27 de cărți de joc, se amestecă bine și se împrăștie pe masă, rugînd o persoană să se gîndească la una dintre ele, desigur, fără a ne spune la care. Cărțile se amestecă din nou și apoi se așază pe masă, una cîte una, în trei pachete distincte, cu fața în jos, fără a le privi, dar arătîndu-le persoanei pentru care este desfășurată scamatoria și rugind-o să rețină în care pachet a fost plasată cartea aleasă și să ne indice acest lucru după împărțirea tuturor cărților. Cele trei pachete se așază unul peste altul și se repetă operațiunea, formînd alte trei pachete. Din nou cerem să ni se spună în care pachet a fost introdusă cartea pe care trebuie să o ghicim, strîngem cărțile și repetăm încă o dată împărțirea lor în trei pachete. Ni se spune din nou în care pachet este cartea căutată, așezăm pachetele unul peste altul, „pipăim" cu atenție fiecare carte pe spate și... scoatem din pachet exact cartea bucluceșă!

Secretul este foarte simplu: avem grijă tot timpul să strîngem cele trei pachete de cărți de pe masă într-o ordine bine precizată. Dacă pachetul în care se găsește cartea aleasă este așezat de fiecare dată deasupra celorlalte (deci

cărţile din el sînt reîmpărţite primele), atunci, în final, prima carte din pachetul complet este cea căutată; dacă aşezăm acest pachet sub celelalte două, atunci cartea aleasă apare în final ultima, iar dacă îl aşezăm de fiecare dată la mijloc, atunci cartea dorită se va plasa în final pe locul 14. Încercaţi şi vă veţi convinge. Dacă aveţi o memorie bună, atunci puteţi realiza variaţii de mare succes, aşezînd de fiecare dată altfel cele trei pachete. De exemplu, aşezînd pachetul care ne interesează prima dată sus, a doua oară jos şi ultima dată la mijloc, atunci cartea căutată va ajunge pe locul 16, aşezînd acest pachet prima dată sus, a doua oară la mijloc şi ultima dată jos, ea se va opri pe locul 22 etc.

Să examinăm ceva mai atent drumul cărţilor în varianta cu 27 de cărţi (fig. 161). Înainte de a începe repartizarea în cele trei grupuri, cartea căutată (6 = cea marcată cu o steluţă în figură) se găsea într-un set de 27 de cărţi. După prima împărţire, domeniul în care ea trebuie căutată se reduce de trei ori. Următoarea aranjare a cărţilor împarte din nou cu 3 numărul candidaţilor. Similar la al treilea pas. Dar $27/(3 \times 3 \times 3) = 1$, deci, nu este nici un mister în apariţia cărţii exact pe locul întîi în grupul indicat de asistenţă la al treilea pas.

Interesantă este însă identitatea dintre procedeul anterior de „ghicire" a unei cărţi necunoscute şi procedeul bine cunoscut de identificare prin numai trei cîntăriri cu ajutorul unei balanţe cu braţe egale şi fără greutăţi a monedei false (mai uşoară, să zicem) strecurată într-un set de 27 de monede. Şi acolo, ca şi aici, la fiecare cîntărire, mulţimea din care trebuie să identificăm moneda falsă se restrînge de trei ori. Două probleme aparent diferite, dar care au acelaşi substrat matematic: teoria informaţiei. Cititorul interesat într-o prezentare informaţională riguroasă a algoritmului de

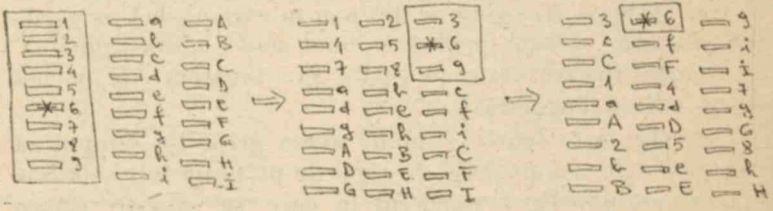

Fig. 161

cîntărire menționat mai sus poate consulta finalul broșurii *Clubul logicienilor*, de Edm. Nicolau, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1970.

Jocul anterior poate fi generalizat la un întreg pachet de cărți de joc, cu singura modificare că trebuie să se formeze (tot de trei ori) cîte patru pachete de cărți. Cheia este aceeași: așezarea celor patru pachete unul peste altul într-o ordine bine precizată după fiecare împărțire a cărților și indicarea pachetului care conține cartea căutată. (Din nou ea va ieși prima dacă pachetul care o conține se așază de fiecare dată deasupra, ultima dacă acest pachet se așază dedesubt și pe poziții bine determinate în orice altă variantă.)

Iată acum un alt truc. Vreți să dovediți cuiva că aveți o memorie formidabilă? Presupun că da. Dacă într-adevăr memoria dumneavoastră este ieșită din comun, atunci descurcați-vă singuri, dacă nu, atunci aplicați metoda care urmează.

Pentru început (pentru „încălzire", nu?), atacați o problemă mai ușoară: luați un pachet *complet* de cărți de joc și rugați pe cineva să scoată pe ascuns o carte. Dintr-o singură răsfoire a pachetului, evident, fără a așeza cărțile pe „culori" (caro, cupă, pică, treflă), bazîndu-vă numai pe memorie, puteți ghici culoarea cărții extrase.

O cale ar fi să numărați efectiv cărțile de caro, cupă, pică, treflă, deci să numărați în paralel pînă la 13 patru serii de obiecte. Greu, dar nu imposibil. Se poate însă proceda mult mai ușor: să „codificăm" cele patru culori ale cărților cu numere de la 1 la 4, în orice ordine doriți (de exemplu, caro = 1, cupă = 2, pică = 3, treflă = 4). Memorați această codificare (numerotarea anterioară este ușor de ținut minte: am considerat mai întîi cărțile roșii, apoi pe cele negre, mai întîi figurile mai simple — caro și pică —, apoi pe cele mai complicate — cupă și treflă; puteți să vă precizați și alte repere mnemotehnice). Să observăm acum că cele patru cărți de o valoare dată conduc la un total al cifrelor asociate culorilor constant, oricare ar fi valoarea respectivă: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Aceasta este cheia trucului: însumăm punctele acordate culorilor, ținînd seama numai de ultima cifră a rezultatului (operăm *modulo zece*, ignorînd cifra zecilor). De exemplu, dacă apar de la început patru cărți de treflă, avem succesiv: 4, $4 + 4 \to 8$, $8 + 4 \to 2$, $2 + 4 \to 6$. Dacă

pachetul ar fi complet, atunci în final ar trebui să obținem zero (echivalent cu zece). Deoarece din el lipsește o carte, cifra obținută diferă de zece exact prin punctele asociate colorii ei: dacă suma a ieșit 9, atunci lipsește o carte de caro, dacă suma este 8, atunci cartea scoasă este de cupă etc.

Simplu, nu? Suma modulo 10 este destul de ușor de calculat.

Evident, ideea anterioară se poate aplica la oricît de multe pachete complete de cărți de joc și cu cît sînt mai multe, cu atît efectul va fi mai spectaculos.

Același substrat matematic stă la baza unui truc și mai interesant: ghicirea *valorii* unei cărți scoase pe ascuns dintr-un pachet care conține toate cărțile de la 1 la 10, inclusiv. La fel ca mai înainte, pot fi folosite mai multe pachete de cărți de joc și rezultatul este același. Într-adevăr, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, deci într-un pachet complet, cărțile de la 1 la 10 totalizează $55 \times 4 = 220$ puncte. Din nou un multiplu al lui 10. Scoțind o carte, suma valorilor rămase sau nu se mai termină cu zero (și atunci diferența pînă la zece reprezintă valoarea cărții extrase), sau se termină cu zero (și deci cartea ascunsă este un zece). În orice caz, sumînd modulo zece (păstrînd mereu numai ultima cifră a rezultatului), putem găsi valoarea cărții dorite, fără a mobiliza aproape deloc capacități de memorie neobișnuite.

Ori culoarea, ori valoarea. Nu văd cum trucurile anterioare ar putea fi combinate pentru a afla în același timp și culoarea și valoarea cărții ascunse (doar dacă nu dorim să efectuăm în același timp două sume, ceea ce este totuși ceva mai dificil). Poate că cititorul va inventa o metodă simplă prin care și această problemă dublă să poată fi rezolvată.

6.4. Rîuri, bărci și logică

Foarte multă lume cunoaște povestea gospodarului care, ajuns pe malul unui rîu împreună cu un lup, o capră și o varză și dispunînd numai de o barcă neîncăpătoare (din motive logice, nu tehnice), trebuie să dezvolte un raționament ingenios pentru a reuși să-și treacă averea intactă pe malul celălalt. Mai puțin cunoscut este faptul că problema este multiseculară, ea fiind consemnată în scris încă din anul

1613, într-o interesantă carte a lui Gaspar Bachet de Méziriac, *Recueil de problèmes plaisantes et délectables qui se font par les nombres*. Prin intermediul lui Edouard Lucas (*Récréations mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1960), voi relua din această carte alte cîteva probleme, similare atît ca decor, cît şi ca atractivitate logică şi anecdotică.

Problema 1: O companie de infanterişti ajunge pe malul unui rîu imposibil de traversat altfel decît cu o ambarcaţiune. Pe rîu se găsesc doi copii care se joacă cu o barcă suficient de încăpătoare pentru ei amîndoi sau pentru un soldat singur, fără însă a putea transporta doi soldaţi sau un soldat şi un copil. Pot soldaţii traversa rîul ajutîndu-se de această barcă (şi, implicit, şi de copii)?

Problema 2: Trei soţi geloşi ajung împreună cu soţiile lor pe malul unui rîu unde găsesc o singură barcă, suficient de mare pentru a purta în ea două persoane, dar nu mai multe. Se poate organiza traversarea în aşa fel încît nici o soţie să nu se afle vreodată în prezenţa unuia dintre ceilalţi doi bărbaţi, dacă soţul ei nu este de faţă?

Problema 3: Patru familii pot traversa rîul în condiţiile problemei anterioare? Formularea sugerează răspunsul negativ; justificaţi-l.

Problema 4: Dar dacă barca poate duce trei persoane deodată?

Problema 5: Dar dacă la jumătatea rîului există o insulă (de „capacitate" nelimitată)?

Răspunsuri:

1. Da. Traversează mai întîi cei doi copii cu barca, unul revine şi rămîne pe primul mal, iar barca este folosită de un soldat care trece astfel dincolo de rîu. Copilul rămas pe al doilea mal revine cu barca şi ajungem din nou la situaţia iniţială (copiii şi barca pe primul mal), cu un soldat trecut peste rîu. Operaţia se repetă pentru fiecare soldat.

2. Da. Notăm cu A, B, C cei trei bărbaţi şi cu a, b, c soţiile acestora. La început traversează rîul a şi b, a revine şi traversează din nou împreună cu c (în felul acesta, soţiile au fost separate de soţi); a revine iarăşi şi rămîne cu soţul, iar B şi C traversează. Revine acum B împreună cu soţia, o lasă pe aceasta cu a şi traversează împreună cu A. Revine acum c şi traversează împreună cu a, apoi revine şi traver-

seazâ împreună cu *b* şi astfel toată lumea trece dincolo de rîu.

3. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, la fiecare traversare, cu excepţia ultimeia, cel puţin o persoană trebuie să revină cu barca pe primul mal. Numărul persoanelor traversate nu poate deci creşte decît cu cel mult o unitate la fiecare etapă, prin urmare există un moment în care pe malul al doilea se află exact 5 persoane. Acestea pot fi: a) 4 bărbaţi şi o femeie, b) 3 bărbaţi şi 2 femei, c) 3 femei şi 2 bărbaţi, d) 4 femei şi un bărbat. În cazurile c şi d, cel puţin o femeie se află în prezenţa unui bărbat fără ca soţul ei să fie de faţă. În cazul b, pe primul mal se găsesc 2 femei şi un bărbat, deci situaţia este din nou interzisă. În primul caz, ultima traversare a adus sau doi bărbaţi, sau un bărbat şi o femeie, deci s-a plecat de la situaţia în care pe primul mal se aflau sau 3 femei şi 2 bărbaţi, sau 4 femei şi un bărbat. Ambele variante sînt interzise, deci traversarea nu poate fi organizată.

4. Notăm iarăşi bărbaţii cu *A*, *B*, *C*, *D* şi soţiile lor cu *a*, *b*, *c*, *d*. La prima traversare trec *a*, *b*, *c*, apoi *a* revine şi o ia şi pe *d*, după care revine din nou, rămîne cu *A* şi traversează *B*, *C* şi *D*. Revine acum *B* cu *b* şi-l iau şi pe *A*. Pe primul mal a mai rămas numai *a;* soţul ei revine cu barca şi traversează împreună, încheind operaţiunea.

5. Din nou răspunsul este afirmativ (insula oferă posibilitatea separării în două grupuri a celor care au părăsit primul mal, ceea ce constituie un plus de „resurse"). Notăm ca mai înainte cu *A*, *B*, *C*, *D*, respectiv, *a*, *b*,*c*, *d* cei patru soţi şi soţii. Traversarea poate fi organizată în următorii 17 paşi (fiecare indică un drum de la un mal la celălalt, pînă la insulă sau de la insulă la cel de-al doilea mal):

Pasul	Primul mal	Insula	Al doilea mal
1	*A B C D c d*	—	*a b*
2	*A B C D b c d*	—	*a*
3	*A B C D d*	*b c*	*a*
4	*A B C D c d*	*b*	*a*
5	*C D c d*	*b*	*A B a*
6	*B C D c d*	*b*	*A a*

7	*B C D*	*b c d*	*A a*
8	*B C D d*	*b c*	*A a*
9	*D d*	*b c*	*A B C a*
10	*D d*	*a b c*	*A B C*
11	*D d*	*b*	*A B C a c*
12	*B D d*	*b*	*A C a c*
13	*d*	*b*	*A B C D a c*
14	*d*	*b c*	*A B C D a*
15	*d*	—	*A B C D a b c*
16	*c d*	—	*A B C D a b*
17	—	—	*A B C D a b c d*

Soluția anterioară a fost prezentată și de către Sam Loyd în una din rubricile sale de probleme de logică și se crede că ea este cea mai economicoasă ca număr de urcări și coboriri din barcă. Probleme de acest gen l-au preocupat și pe Lewis Carroll (ceea ce nu este deloc de mirare).

Joc pur de inteligență, mai complex și, se spune adesea, mai interesant decît toate celelalte jocuri, GO-ul este în același timp unul dintre cele mai vechi sporturi ale minții practicate de om. Istoria sa începe cu aproximativ două milenii înaintea erei noastre, în China, fiind inventat, după unele cronici, de împăratul Shun, ca mijloc de accelerare a dezvoltării minții nu tocmai strălucite a fiului său, după alte cronici, mai credibile, de un vasal al împăratului Kieh Kwei, pe nume Wu, același care a inventat și cărțile de joc. La începutul erei noastre, jocul cunoștea o mare dezvoltare în China, apoi, în jurul anului 735 e.n., a trecut în Japonia, unde, în cîteva secole, a fost adus la perfecțiune. Ținut la mare cinste la curțile nobiliare, cu numeroși jucători faimoși, de numele cărora sînt legate partide istorice, cu miză uriașă (se pare că, uneori, conflicte militare propriu-zise erau decise în urma unor întîlniri mai puțin sîngeroase, dar nu mai puțin înverșunate, în jurul tablei de GO), nelipsit din echipamentul războinicilor vremii, cu o Academie de GO protejată de șogun și beneficiind de cei mai buni profesori, perioada scursă de la introducerea în Japonia și pînă la jumătatea secolului trecut cunoaște o continuă evoluție ascendentă a jocului (atît în conținut, cît și ca prestigiu). Nenumărate legende, împletind realitatea cu ficțiunea, stau mărturie despre prețuirea arătată GO-ului și practicanților săi în acele vremuri, descriind în același timp în termeni elogioși jocul. Rolul său în dezvoltarea inteligenței, memoriei, stăpînirii de sine, caracterul său artistic, complexitatea deosebită, cerînd o viață întreagă de studiu, sînt trăsături adesea subliniate de aceste legende. Trecînd însă în domeniul realității, calitățile GO-ului sînt incontestabile și cel mai pregnant mod de a le scoate în evidență este comparația cu șahul, alt joc care face cinste inteligenței umane, dar care, deși mult mai răspîndit astăzi decît GO-ul, este

depășit de acesta din urmă din mai multe puncte de vedere. În fond, o partidă de șah simulează o luptă medievală, limitată, între două armate cu o structură de tip feudal. GO-ul, în schimb, seamănă mult mai mult cu o campanie militară modernă, pe tabla de GO se întrec două armate, omogene fiecare, confruntîndu-se în mai multe lupte locale, dar influențate și cu influență asupra întregii table și guvernate de principii tactice și strategice surprinzător de similare unor principii de bază ale tacticii și strategiei militare.

Nu trebuie înțeles din cele spuse mai sus că GO-ul are un caracter războinic. Paradoxal, dar lucrurile stau exact invers. În fața tablei de GO, cei doi jucători nu se simt și nu se comportă ca niște adversari propriu-ziși, ci mai mult ca niște co-competitori într-un sport de tipul atletismului. Iar scopul fiecărui jucător nu este de a „ucide" o piesă adversă, ca la șah, ci de a *face* ceva, mai repede și mai bine decît partenerul de întrecere. Esența GO-ului este constructivitatea obiectivelor sale. Bineînțeles, „construind", piesele celor doi jucători își dispută porțiuni ale tablei, intrînd deci în conflict, astfel că majoritatea partidelor capătă o tensiune inimaginabilă, nu totdeauna ușor sesizabilă de pe „margine" (ca la șah), dar în final învinsul se recunoaște învins mai mult de propriile erori, decît de „capcanele" adversarului. De altfel, o realistă și exactă cunoaștere a forțelor proprii este o altă trăsătură a personalității jucătorilor de GO, trăsătură încurajată de un sistem minuțios de clasificare și, element inedit, legat de acesta, de un sistem de handicap care egalează forțele în partidele între jucători de tării diferite, făcînd astfel întrecerea la fel de atractivă pentru fiecare.

A vorbi despre GO nu este însă totuna cu a juca GO. Ținînd seama de obiectivele lucrării de față, aici nu vom intra însă în amănunte privind jocul, tactica și strategia lui (se spune adesea că regulamentul poate fi învățat în cîteva minute, tactica și strategia sa în treizeci de ani...). De aceea, în continuare nu voi prezenta decît un regulament sintetic al GO-ului, cu puține explicații, o mini-partidă comentată (pe o tablă redusă), pentru a facilita înțelegerea acestui regulament, trecînd apoi la unele considerații matematice asupra jocului.

Cititorul interesat de mai multe amănunte este rugat să consulte revista „Știință și tehnică", unde, începînd cu luna decembrie 1982, a apărut lunar o rubrică de GO, prima în

țara noastră. Probleme de GO pot fi găsite și în „Viața studențească", începînd cu 26 octombrie 1983, precum și în revista „Rebus", începînd cu 1 martie 1984. De asemenea, în 1985 a apărut sub egida RECOOP-CENTROCOOP, producătorul unui frumos joc de GO, cartea: Gh. Păun, *Inițiere în GO*, în care, bineînțeles, se merge mult mai departe în prezentarea jocului.

7.1. Regulamentul jocului de GO

1. *Echipamentul de joc.* GO-ul se joacă pe o tablă caroiată prin 19 linii orizontale și 19 linii verticale (formînd 361 de puncte de intersecție), cu piese albe și negre, de formă (lenticulară) identică, numite pietre (181 de piese negre și 180 albe, deși nu toate sînt folosite în cursul unei partide). Dimensiunile tablei standard sînt de aproximativ 45 cm vertical și 42 cm orizontal (dar se poate juca GO și pe table mai mici).

Ca la șah, liniile verticale se notează cu literele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* (lipsește *I*, din cauza asemănării cu cifra 1), iar cele orizontale se notează cu numere de la 1 la 19; colțul din stînga-jos este notat cu *A*1. Punctele *D*4, *D*10, *D*16, *K*4, *K*10, *K*16, *Q*4, *Q*10, *Q*16 sînt îngroșate (fig. 162) și sînt folosite pentru plasarea pietrelor handicap — vezi punctul următor — și pentru orientare.

2. *Mutările.* Cei doi jucători plasează pe rînd cîte o piesă pe tablă, într-un punct de intersecție a două linii (inclusiv pe liniile de margine). Piesele nu-și schimbă niciodată locul. Jucătorul cu piesele negre mută primul (se consideră că acest lucru îi dă un avantaj de aproximativ cinci puncte, care, eventual, pot fi în final scăzute din punctajul său; se scad de obicei 4,5 sau 5,5 puncte, pentru a elimina astfel remiza). Dacă diferența de tărie între jucători este mare, atunci jucătorul mai slab poate primi între 2 și 9 piese handicap. Acestea se așază după cum urmează: 2 pietre — în *D*4 și *Q*16, 3 pietre — în *D*4, *Q*16 și *Q*4, 4 pietre — în *D*4, *Q*4, *D*16 și *Q*16, 5 pietre — ca mai sus, plus *K*10, 6 pietre — în *D*4, *Q*4, *Q*16, *D*16, *D*10 și *Q*10, 7 pietre — ca mai sus, plus *K*10, 8 pietre — în *D*4, *K*4, *Q*4, *D*16, *K*16, *Q*16, *D*10, *Q*10, 9 pietre — ca mai înainte, plus *K*10.

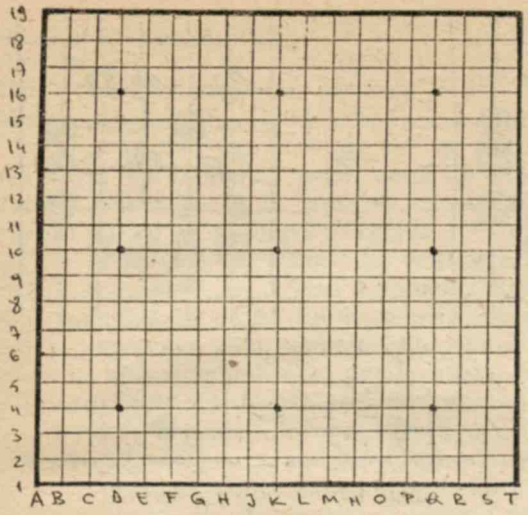

Fig. 162

Într-o partidă cu handicap, albul este deci cel care mută efectiv primul.

Mutările pot fi făcute oriunde pe tablă, cu excepțiile de la punctele 4 și 5 de mai jos.

3. *Captură.* Punctele adiacente unei piese se numesc libertăți. O piesă izolată are 4, 3, sau 2 libertăți, după cum ea este plasată în centrul tablei, pe o linie de margine, sau la un colț al tablei. Un grup de piese care ocupă puncte vecine ale tablei se comportă solidar (însumîndu-și libertățile). O piesă sau un grup de piese încercuit de adversar astfel încît nu mai are decît o singură libertate se zice că este în *atari*. Un grup de piese complet încercuit (fără nici o libertate) este *capturat*, iar piesele se ridică de pe tablă (se numesc prizonieri) (vezi fig. 163).

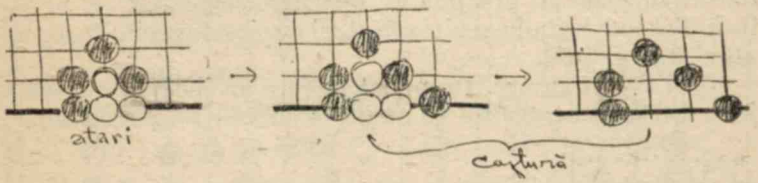

Fig. 163

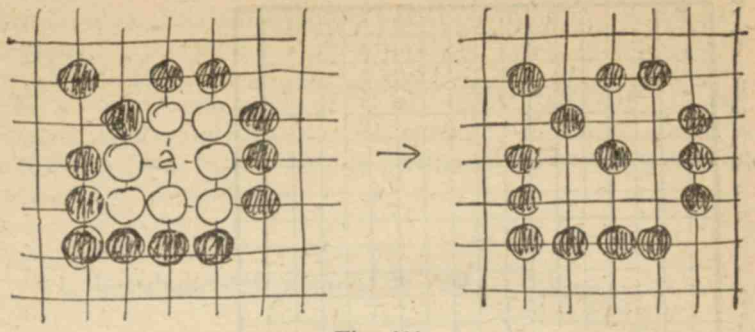

Fig. 164

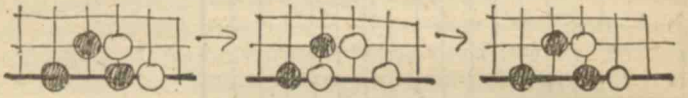

Fig. 165

4. *Mutări interzise.* O piesă nu poate fi plasată într-un punct complet încercuit de adversar sau astfel încît să ocupe ultima libertate a unui grup de piese de aceeaşi culoare („sinuciderea este interzisă"), decît dacă ea capturează piese adverse, creînd astfel libertăţi grupului propriu. (În figura 164, albul nu poate juca în punctul *a*, dar negrul poate juca aici, deoarece capturează toate piesele albe alăturate.)

5. *Ko.* O poziţie (ca aceea din fig. 165), în care jucătorii pot captura şi recaptura pe rînd cîte o piesă se numeşte *ko.* Pentru a preveni o asemenea evoluţie ciclică a jocului, recaptura nu este permisă înainte de a face cel puţin o mutare în altă parte a tablei. Restricţia este valabilă pentru ambii jucători. Dacă, după ce un jucător capturează, adversarul joacă undeva pe tablă, iar primul jucător poate ignora această mutare (nu este într-atît de periculoasă încît să fie nevoit să joace în preajma ei, apărîndu-se), atunci el poate închide *ko*-ul, legîndu-şi piesa în atari de piesele vecine (precum albul în fig. 166).

6. *Viaţă şi moarte.* Un punct în care un jucător nu poate juca din cauza regulii 4 se numeşte *ochi* (în mijlocul tablei,

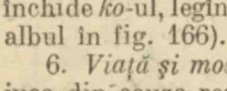

Fig. 166

un ochi este înconjurat de cel puțin șapte piese, altfel el este un *ochi fals*: una sau mai multe dintre piesele care-l delimitează pot fi atacate din exterior și apoi, jucînd în ochi, ele sînt capturate, dizolvînd ochiul).

Un grup de piese care are sau își poate forma la nevoie cel puțin doi ochi (cel puțin două libertăți interioare separate) nu mai poate fi capturat în nici un fel (din cauza regulii 4): el se numește *grup viu*. Un grup de piese care nu are și nu-și poate forma doi ochi prin joc alternativ este numit *grup mort*. În finalul partidei, toate grupurile moarte sînt îndepărtate de pe tablă ca prizonieri, fără a fi nevoie să fie capturate efectiv (consumînd pentru aceasta mutări utile în alte scopuri). (Grupurile negre din figura 167 sînt vii, cele negre din figura 168 sînt moarte.)

7. *Seki*. O poziție în care există două grupuri opuse de piese fără ochi sau numai cu cîte un singur ochi și în care nici un grup nu poate captura pe celălalt (sau primul care joacă acolo pierde, sau poziția ciclează) poartă numele *seki*; ambele grupuri sînt considerate vii (excepție deci de la punctele anterioare). (A se vedea un exemplu în figura 169.)

8. *Teritoriu*. O porțiune a tablei încercuită de piese vii ale unui jucător (folosind eventual și marginea tablei ca graniță) și la care adversarul nu are acces cu piese vii poartă numele de *teritoriu* și fiecare punct al său (intersecție a liniilor caroiajului) se adaugă la punctajul jucătorului respectiv. Punctele tablei la care se poate ajunge, mergînd pe liniile caroiajului, de la piese vii ale ambilor jucători, se numesc *puncte neutre* și nu fac parte din teritoriul nimănui (fig. 170). În particular, în *seki* nu se numără punctele „încer-

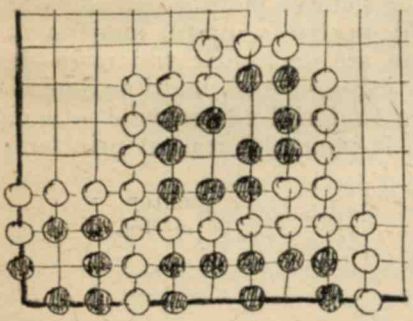

Fig. 167

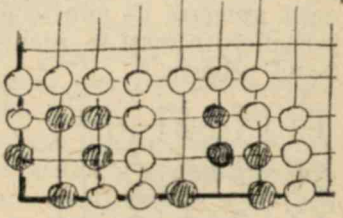

Fig. 168

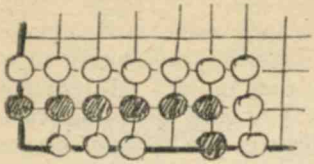

Fig. 169

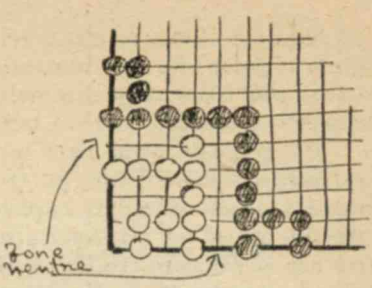

Fig. 170

cuite" de piesele participante la *seki*, chiar dacă adversarul nu are acces la ele (vezi fig. 171).

9. *Sfîrşitul jocului*. Jocul continuă pînă ce nici un jucător nu mai are motive să joace (nu-şi poate lărgi teritoriile, nu mai poate captura piese, nu mai poate diminua teritoriile adversarului, nu mai are nevoie să-şi întărească graniţele propriului teritoriu). Jucătorul care este la mutare propune atunci încheierea partidei. Dacă adversarul nu acceptă, el trebuie să joace mai departe (eventual jucînd *pas*, adică lăsîndu-l pe adversar să joace efectiv de mai multe ori la rînd). Orice dilemă în legătură cu grupurile de piese de pe tablă se rezolvă prin joc efectiv (decizia dacă un grup de piese este mort şi poate fi eliminat în final poate fi uneori discutabilă). Cînd cei doi jucători cad de acord că jocul s-a terminat, atunci se îndepărtează piesele moarte, se umplu toate punctele neutre cu piese de orice culoare, după care fiecare jucător pune prizonierii pe care i-a capturat în teritoriul adversarului, diminuîndu-l în consecinţă, şi apoi teritoriile se rearanjează prin translatarea pieselor (formîndu-se pe cît posibil dreptunghiuri) pentru a uşura numărarea. Cîştigător este jucătorul care are un număr mai mare de puncte. Dacă un jucător a capturat mai mulţi prizonieri decît numărul de puncte din teritoriul adversarului, atunci prizonierii rămaşi se adaugă la punctajul realizat prin teritoriul propriu.

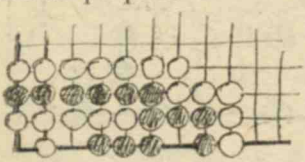

Fig. 171

Jocul se poate, evident, termina și prin abandon. În partidele oficiale, un jucător poate de asemenea pierde partida și prin depășirea timpului de gîndire (timpul de gîndire este precizat pentru fiecare concurs în parte).

10. *Alte precizări.* În finalul unei partide, toate *ko*-urile trebuie să fie închise (de jucătorul care poate face acest lucru). Dacă pe tablă există mai multe *ko*-uri sau poziții similare care pot fi repetate la nesfîrșit, chiar respectînd regulile anterioare și dacă o asemenea poziție se repetă efectiv și nici unul dintre jucători nu rezolvă acest impas, atunci partida este anulată. Prin tradiție, în alte situații speciale — extrem de rare — în care regulile anterioare nu sînt suficiente, dilemele se tranșează conform precedentelor consemnate de Asociația Japoneză de GO.

Notă. Prezentarea de aici a regulilor GO-ului are la bază regulamentul campionatelor mondiale de amatori, în formularea din 1980 a Asociației Japoneze de GO, forul organizator al acestor campionate (anuale).

7.2. O mini-partidă comentată*

Cel mai ușor și mai sugestiv mod de a învăța GO este trecînd direct la joc, mai exact, la a urmări o partidă de la început pînă la sfîrșit, eventual cu cineva care cunoaște deja jocul. Exact în acest fel vom proceda în continuare, urmărind mutare cu mutare o partidă desfășurată pe o tablă 9×9. Atrag atenția cititorului (mai ales a celui care știe deja să joace GO) că această partidă este „construită" în așa fel încît să cuprindă cît mai multe dintre noțiunile prezentate în regulamentul anterior și nu pentru a indica mutări recomandabile într-o situație sau alta.

Să privim figura 172, în care sînt indicate primele 12 mutări ale partidei (piesele au înscrise pe ele numărul mutării prin care sînt introduse în joc). Jocul începe la colțuri, pe liniile 3, 4 ale tablei; fiecare jucător încearcă să-și schițeze un posibil teritoriu spre colțurile și pe laturile tablei, acolo unde cu piese puține se pot încercui puncte multe. După primele patru mutări, negrul este „stăpîn" pe colțul din dreapta-jos, iar albul pe partea de sus a tablei. Negru 5 amenință să extindă influența negrului și în colțul din dreapta-sus, de aceea albul îl oprește, lăsîndu-l pe negru să amenințe

* Paragraf reluat din cartea *Inițiere în GO.*

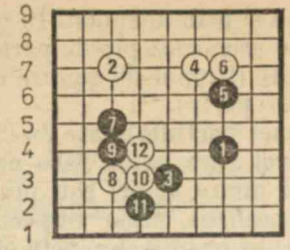

Fig. 172

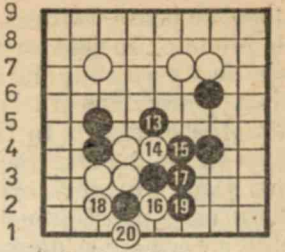

Fig. 173

cu ocuparea unui teritoriu imens şi pe partea stîngă a tablei prin mutarea 7. Cu mutarea 8, albul „invadează" însă colţul din stînga-jos, negrul se întăreşte pe stînga cu 9, ameninţînd în acelaşi timp cu prinderea piesei albe 8 în „cleştele" pieselor sale. După alb 10, negrul îşi materializează această intenţie cu mutarea la *D2*, la care albul răspunde încercînd să scape spre centru. Deja după mutările 8, 9, partida a trecut de stadiul „deschiderii", intrînd în stadiul de mijloc, cînd iau naştere lupte locale, cu implicaţii însă asupra întregii table. Negrul încearcă să oprească ieşirea spre centru, jucînd mutarea 13 în *E5* (fig. 173), creînd astfel a *plasă*, prin „ochiurile" căreia albul nu mai poate scăpa (după alb *D5* sau *E4* ar urma negru *D6*, respectiv, negru *F4*). Într-adevăr, la alb *E4*, negrul răspunde în grabă cu *F4*, după care albul joacă la *E2*. În acest moment, piesa neagră de la *E3* mai are un singur punct vecin cu ea liber, cel de la *F3* (ea este în *atari*). Dacă albul ar juca la *F3*, atunci această piesă ar fi complet încercuită, ar fi ridicată de pe tablă şi albul ar avea în acest fel un prizonier, contînd ca un punct în finalul partidei. Negru 17 încearcă să prevină acest lucru, legînd piesa atacată de alte piese negre şi formînd un grup compact de patru piese *(E3, F3, F4, G4)*, care se comportă solidar. Albul atacă acum imparabil piesa neagră de la *D2* (dacă negrul ar juca la *D1*, atunci după alb *C1*, negru *E1*, alb *F1* ar captura trei piese negre). Negru 19 la *F2* îl obligă pe alb să captureze cu mutarea 20. După această mutare, tabla arată ca în figura 174. Negrul încearcă să separe piesele albe în două grupuri, cu preţul lăsării albului să-şi lărgească teritoriul în colţ (22); negrul îl opreşte (23), apoi albul se apără (24), altfel negrul ar fi putut juca la *B3*, capturînd piesa de la *B4*. Negrul îşi

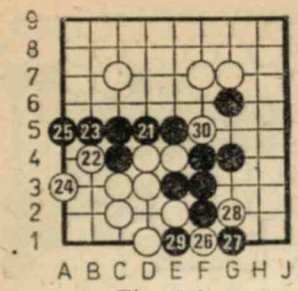

Fig. 174

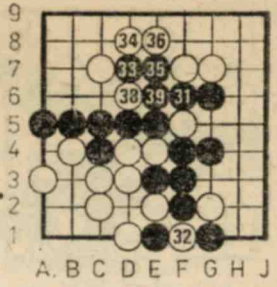

Fig. 175

definitivează granița, jucînd la *A5*, ceea ce îi dă răgaz albului să joace la *F1*, încercînd diminuarea teritoriului negru în acest colț, negrul îl oprește cu mutarea 27 la *G1*, după care albul atacă la *G2*. În acest moment, piesele 26 și 27 sînt în atari. Negrul capturează jucînd la *E1* și astfel a apărut un *ko*. Recaptura imediată este interzisă, de aceea albul trebuie să joace în altă parte pe tablă, oriunde dorește. Ideal ar fi ca el să găsească o mutare suficient de agresivă astfel încît negrul să răspundă la acea mutare, lăsîndu-l pe alb să recapturezе în *ko*. O asemenea mutare pare a fi *F5*, amenințînd cu capturarea grupului din stînga-mijloc, după legarea pieselor albe de la *F5* și *F7*. Negrul se apără, într-adevăr (fig. 175) și albul recapturează în *ko*, jucînd la *F1*. Este acum rîndul negrului să găsească o amenințare la *ko*, jucînd altundeva pe tablă. El joacă la *D7*, albul se apără la *D8*, negrul atacă mai departe la *E7* (consumîndu-și astfel o amenințare), albul se apără la *E8* și abia acum negrul recapturează în *ko*, jucînd în *E1*. Este rîndul albului să atace prin *D6*, negrul se apără și albul recapturează în *ko* (fig. 176). Negrul capturează piesa din *D6* și acum albul are răgazul să închidă *ko*-ul, jucînd în *E1* și rezolvînd conflictul. Urmează negru *H2*, alb *H1* (obligat să captureze), negru *G3*, alb *D1*, negru *J2* (apără piesa din *H2*), alb *B7*, negru *H7*, alb *H8* (ambii jucători încearcă să-și lărgească cît mai mult teritoriile, micșorîndu-le pe cele adverse). Urmează negru *J7*, alb *J8*, negru *H6* (obligat), alb *A4* (dacă negrul ar juca aici, albul ar trebui să se apere la *B3*, pierzînd un punct), negru *H3* (după alb *J1*, oricum negrul ar trebui să joace aici), alb *A7* și cei doi jucători cad de acord că partida s-a terminat, nici unul

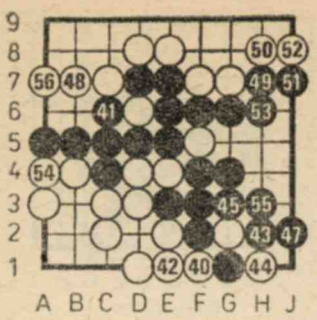

Fig. 176

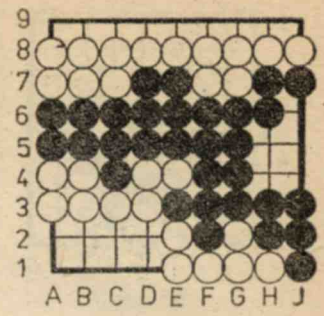

Fig. 177

nu mai poate cîștiga noi puncte, fie de teritoriu, fie capturînd piese adverse.

Se trece acum la numărarea punctelor. În primul rînd, se ridică de pe tablă piesele care nu mai pot evita capturarea. O singură piesă este în această situație, cea albă de la *F5*. Ea se scoate de pe tablă fără a fi deci capturată efectiv, fără ca negrul să consume o mutare și un punct din teritoriul propriu în acest scop. Fiecare jucător are deci cîte patru piese capturate. Albul are două teritorii, unul în partea de sus a tablei și unul în stînga-jos, negrul are unul singur, pe dreapta. Să remarcăm că aceste teritorii sînt efectiv închise, legăturile pe diagonală între piesele albe de la *B4* și *C3*, de exemplu, nu reprezintă „spărturi" ale graniței, deoarece nici o linie a caroiajului nu trece printre aceste piese. Există pe tablă și trei puncte care nu sînt nici ale albului, nici ale negrului, cele din *J1*, *A6* și *B6*. Ele nu sînt încercuite nici de alb, nici de negru, sînt puncte neutre.

Pentru o ușoară numărare a punctelor fiecărui jucător, se procedează astfel: se acoperă punctele neutre cu piese de indiferent care culoare, apoi se așază prizonierii albi (capturați de negru) în teritoriul albului, diminuîndu-l corespunzător și prizonierii negri în teritoriul negrului, apoi se rearanjează teritoriile pentru a le transforma în dreptunghiuri (prin translatarea pieselor împrăștiate neregulat la mijlocul lor). Procedînd astfel, putem aduce situația din figura 176 la cea din figura 177. Albul totalizează deci 17 puncte, 9 sus și 8 în colțul din stînga-jos, iar negrul numai 5 puncte, în partea dreaptă a tablei. Albul a învins deci (după 56 de mutări) cu 12 puncte.

7.3. Cîteva considerații matematice asupra GO-ului

Acum, că știm să jucăm GO, să trecem la a-l evalua matematic. În primul rînd, cîteva referiri la complexitatea sa (complexitatea algoritmilor prin care se poate decide învingătorul, plecînd de la o configurație dată a tablei).

De curînd (rezultatul a fost anunțat la cel de-al 9-lea Congres mondial de informatică, IFIP'83, Paris, septembrie 1983) s-a demonstrat (de către J.M. Robson, din Canberra, Australia) că *GO-ul este complet în timp exponențial.*

Ce înseamnă aceasta? S-o luăm ceva mai de departe, de la noțiunea de *algoritm* și *complexitate algoritmică.* Să considerăm un exemplu. Plecăm de la o mulțime de numere, $M=\{m_1,...,m_n\}$ și ne propunem să răspundem la următoarele întrebări:

1. Mulțimea M conține un număr par de numere pare?

2. Facem produsul oricăror două numere distincte din M, obținînd astfel mulțimea

$$P = \{m_1m_2,\ m_1m_3,...,m_1m_n,...,m_{n-1}m_n\}$$

și apoi adunăm cifrele fiecărui număr din P, obținînd mulțimea

$$Q = \{p_1,...,p_{n(n-1)}\}$$

Mulțimea Q conține un număr par de numere pare?

3. Considerăm

$$P' = \{m_{i_1} m_{i_2} ... m_{i_k} \mid k \geqslant 1,\ 1 \leqslant i_j \leqslant n,\ i_j < i_r,\ j < r\},$$

adică mulțimea tuturor produselor distincte de numere distincte din M și apoi construim mulțimea Q' ca mai sus. Mulțimea Q' conține un număr par de numere pare?

Trei întrebări, toate depinzînd de mulțimea M inițială. La prima întrebare este ușor de răspuns: parcurgem mulțimea M, verificînd pentru fiecare număr dacă e par sau impar și după n asemenea verificări putem răspunde la întrebarea pusă. Acest mod de a rezolva problema nu depinde de M, pentru orice mulțime procedura decurge la fel și timpul de calcul (numărul pașilor elementari, de genul verificării dacă un număr e par sau impar) depinde liniar de numărul elementelor mulțimii M.

Pentru a doua problemă trebuie mai întîi să efectuăm $n(n-1)$ înmulțiri, apoi $n(n-1)$ adunări ale cifrelor numerelor obținute și în cele din urmă $n(n-1)$ verificări dacă numerele respective sînt pare sau impare. În total, vom face

aproximativ $3(n^2 - n)$ „calcule" elementare. Spunem că metoda anterioară rezolvă problema a doua în timp polinomial, că ea este de complexitate polinominală.

În sfîrșit, pentru rezolvarea celei de a treia probleme, trebuie să calculăm mai întîi toate produsele ce pot fi formate cu cele n numere, adică $2^n - n - 1$ (am scăzut „produsele" formate dintr-un singur număr sau din nici un număr), apoi trebuie să facem $2^n - n - 1$ adunări ale cifrelor acestor produse și în cele din urmă să verificăm paritatea tuturor celor $2^n - n - 1$ totaluri. Sîntem astfel obligați să facem $3(2^n - n - 1)$ „operații" elementare, sume, produse, comparări. Algoritmul acesta lucrează un timp ce depinde exponențial de dimensiunea mulțimii M.

Trei probleme, trei niveluri diferite de complexitate: *liniară*, *polinomială*, *exponențială*. Evident, complexitatea liniară este cea mai convenabilă. Funcțiile exponențiale cresc însă atît de rapid încît pentru valori relativ mici ale argumentului (pentru dimensiuni relativ mici ale problemelor), valorile lor ajung excesiv de mari (deci timpul de rezolvare devine prohibitiv, indiferent de mijloacele tehnice de rezolvare folosite). Din păcate, puține probleme pot fi rezolvate în timp liniar și (și mai „din păcate") numeroase probleme practice nu pot fi rezolvate altfel decît în timp exponențial (timpul polinomial este mult mai convenabil, creșterea polinomială poate fi în mai mare măsură stăpînită).

Deciderea cîștigătorului unei partide de GO este o asemenea problemă exponențială. Mai exact, considerînd că se joacă GO pe o tablă de dimensiuni $n \times n$, un algoritm care ar putea decide cine învinge atunci cînd se pleacă dintr-o configurație arbitrară dată trebuie să lucreze un timp care depinde exponențial de n înainte de a da răspunsul.

Mai mult, GO-ul este și *complet* în timp exponențial, aceasta însemnînd că problema anterioară este una dintre cele mai grele probleme exponențiale, oricare altă problemă exponențială poate fi redusă la problema deciderii învingătorului în GO și această reducere se poate face în timp polinomial. „Polinomial plus exponențial fac exponențial", deci problema noastră este una dintre cele mai grele probleme exponențiale. În treacăt fie spus, foarte multe probleme sînt printre „cele mai grele probleme exponențiale" în sensul anterior, deci afirmația nu trebuie să ne sperie. În particular, și despre șah s-a demonstrat că este complet în timp exponen-

țial. Cele două super-jocuri par deci la fel de complexe. Cu două mențiuni: a) „la fel de complexe" relativ la clasificarea de care am vorbit a problemelor; nu este exclus ca la o rafinare a clasei „exponențiale complete" să apară diferențe (greu de prezis în favoarea căruia dintre aceste jocuri) și b) GO-ul se joacă pe table 19×19 și, să zicem, 2^{19} diferă sensibil de 2^8. Din punct de vedere practic, „exponențial" nu spune totul; trebuie să cunoaștem și exponentul (precum și baza, desigur).

Un amănunt din rezumatul articolului lui J.M. Robson: „În demonstrația acestui rezultat se au în vedere configurații care conțin un mare număr de scheme pe care jucătorii de GO le cunosc sub numele de «ko»". (Nu cunosc alte detalii despre această demonstrație.)

Faptul că GO-ul este de complexitate exponențială descurajează speranțele de a construi programe de calculator care să joace GO de performanță, mai ales că, așa cum subliniam mai sus, la GO exponentul este 19. Deși exponențial și el, șahul a putut fi programat deja, la ora actuală programele de șah jucînd la nivelul de mare maestru (chiar de mare maestru internațional, s-ar părea). La GO lucrurile au rămas mult în urmă, progresele sînt mult mai încete, mai firave. Voi relua din capitolul întîi al cărții lui Donald D. Spencer, *Game playing with computers* (Hayden Book Comp., Rochelle Park, 1975) (un titlu incitant, dar, din păcate, un conținut foarte modest) următorul paragraf (p. 9—10): „Jocul japonez de GO este extrem de cunoscut printre informaticieni (...) Regulile GO-ului sînt simple, dar nu se cunoaște nici o teorie matematică a jocului. S-a estimat că există în jur de 10^{172} de poziții diferite posibile în cursul unei partide. Este clar că ar fi imposibil de calculat toate aceste variante în cursul jocului. Acesta este unul dintre motivele pentru care GO-ul este atît de interesant ca joc pentru calculator. Au fost scrise deja cîteva programe de GO pentru calculatoare numerice. Unul dintre ele constă în aproximativ 30 000 de instrucțiuni, pentru un calculator IBM-704. GO-ul este probabil cel mai dificil dintre jocurile de tablă („board game"). Nici un program care să joace GO cu un succes real nu a apărut încă. Totuși, Thorp și Walden (1970) au investigat cîteva dintre aspectele logice ale jocului; Zobrist (1969) a descris un program care joacă corect și a atins treapta de jos a scării jucătorilor umani de GO, iar Rydes (1971) descrie un

program care folosește tehnici de căutare euristică reușind să joace GO la nivelul unui începător. Probabil că vor mai trece mulți ani pînă ce va fi scris un program cu adevărat «priceput» la jocul de GO."

Din păcate, D.D. Spencer nu precizează la ce lucrări ale lui Thorp & Walden, Zobrist și Ryder se referă.

În 1974 a apărut însă un raport intern la „Computer Science Department", Washington State University, semnat D.B. Benson și intitulat „Life in the game of GO", în bibliografia căruia găsim următoarele titluri: S. Dowsey, „GO and the computer", „GO Review", 13, 3 (1973) 72–74, E. Thorp, W. Walden, „A partial analysis of GO", „The Computing Journal", 7, 3 (1964), 203–207 și E. Thorp, W. Walden, „A computer assisted study of GO on $N \times N$ boards", „Information Sciences", 4, 1 (1972), 1–33.

Iată cîteva informații din primul articol al lui Thorp și Walden, singurul din cele anterioare pe care îl cunosc. Scopul lui este de a analiza o variantă „mai precis definită a jocului", pe table reduse, pentru a afla cîte ceva despre jocul normal. După o serie de definiții matematice a ceea ce înseamnă în GO captură, piese vii, piese moarte etc., se dau o serie de rezultate despre joc (majoritatea pentru varianta redusă.)

Un prim rezultat spune că „albul nu are strategie cîștigătoare", iar justificarea acestei afirmații este imediată (am mai folosit acest argument și la moara în spațiu): dacă albul ar avea strategie de cîștig, atunci negrul ar avea cel puțin strategie de remiză, deoarece el ar putea juca *pas* la prima mutare și apoi devine al doilea. Dacă și albul joacă *pas*, atunci partida se încheie remiză (după ...nici o mutare), altfel negrul va învinge aplicînd strategia de cîștig a albului.

Pe de altă parte, nici unul dintre jucători nu are strategie de remiză, repetînd simetric față de centrul tablei jocul adversarului. Pentru alb acest lucru este ușor de văzut, deoarece negrul, mutînd primul, îl poate atrage într-o capcană ca aceea din figura 178, în care negrul, jucînd în centru, capturează și cîștigă, dar albul nu mai poate captura.

Nici negrul nu poate forța remiza jucînd în centru și apoi repetînd simetric jocul adversarului și această afirmație este adevărată pe orice tablă $n \times n$, cu n impar mai mare sau egal cu 5. Ideea de demonstrație este indicată în figura 179, în care, aflat la mutare, albul mută în colțul din stînga-jos și cîștigă.

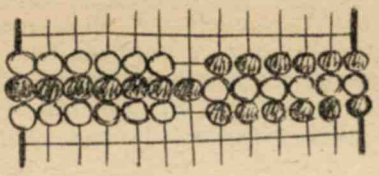

Fig. 178

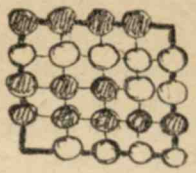

Fig. 179

În articolul citat, Thorp și Walden caută și strategii cîștigătoare sau de remiză pentru table mici. Astfel, pe table 2×2 și 2×3, negrul poate face remiză și acesta este cel mai bun rezultat pentru el. Într-adevăr, partida 2×2 se termină fie „la limită" (niciodată, dar cîștigul este evaluat ca limita numărului de puncte cîștigate de fiecare jucător), fie atunci cînd ambii jucători mută *pas*. După prima mutare a negrului, albul este obligat să răspundă în colțul opus, apoi negrul joacă *pas*. Dacă albul joacă efectiv, negrul pasează din nou, albul capturează (o piesă), negrul capturează (trei piese) și se revine la poziția inițială, cu două puncte în plus pentru negru, care astfel cîștigă. Albul va juca deci *pas* și partida se va încheia după două mutări.

Pe tabla 2×3, negrul trebuie să paseze de la început și își asigură astfel remiza.

Pe tabla 2×4, negrul poate învinge totdeauna și cheia este pătratul din centru al tablei (fig. 180), din care negrul trebuie să acopere fie două colțuri opuse, fie o latură verticală. Iată cîteva „partide" de acest gen:

1. Negru $B1$, alb orice altceva decît $C2$, negru $C2$, alb lîngă prima piesă albă, negru $A2$ sau $D1$ (fără a captura) și albul nu mai poate juca.

2. Negru $B1$, alb orice altceva decît $C2$, negru $C2$, alb în partea opusă primei piese albe, negru capturează (dacă albul a jucat la $B2$ sau la $C1$) sau joacă la $B2$ sau $C1$; albul mai poate face numai două mutări.

3. Negru $B1$, alb $C2$, negru $B2$, alb $B1$, negru $D1$ și a cîștigat.

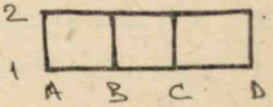

Fig. 180

Şi pe tabla 3 × 3 negrul învinge totdeauna, deoarece pe această tablă un grup cu un ochi va avea implicit doi ochi, deci va fi viabil. Negrul începe prin a juca în centru, apoi sau îşi face un ochi într-un colţ sau ocupă întreaga linie (sau coloană) a centrului; în ambele situaţii, el formează doi ochi şi cîştigă.

Autorii articolului menţionat precizează că nu au putut găsi strategii similare pentru tabla 3 × 4 sau pentru table mai mari, dar speră că, folosind un calculator mai perfecţionat pentru evaluarea tuturor variantelor posibile de joc, să rezolve şi asemenea probleme. Nu ştiu dacă şi-au realizat această speranţă. Dacă cititorul cunoaşte amănunte în plus, i-aş fi recunoscător pentru ele.

Lucrarea amintită a lui D.B. Benson îşi propune a fi un prim pas spre o teorie „realistă" a GO-ului, în perspectiva programării lui şi pleacă de la observaţia că prin metode enumerative, de căutare pe arborele evoluţiilor posibile ale jocului, pornind de la o poziţie dată, nu se poate ajunge prea departe în analiza jocului de GO (concluzie care rezultă şi din dificultăţile semnalate de Thorp şi Walden). Benson propune în schimb o procedură mai „umană": evaluarea statică a unei poziţii (formaţii de piese) pentru a decide dacă ea este viabilă sau nu, cunoscut fiind faptul că jucătorii de GO procedează de cele mai multe ori la fel, evaluînd „din ochi" poziţiile, recunoscînd „patternuri" viabile şi neviabile. În lucrare sînt prezentaţi algoritmi de recunoaştere a grupurilor vii şi a grupurilor moarte, eficienţi ca timp de lucru, dar cerînd multă memorie. (Evident, problema este mai particulară decît cea tratată de J.M. Robson; aici nu se pune problema învingătorului întregii partide, ci numai într-o luptă locală limitată.)

Cercetări în legătură cu „computerizarea" jocului de GO se desfăşoară şi în Japonia, în legătură cu spectaculosul proiect japonez de construire a unor calculatoare de generaţia a cincea, capabile de activităţi intelectuale de mare anvergură. Nu este exclus ca din noua direcţie să apară surprize serioase în acest domeniu.

8. BIBLIOGRAFIE

Lista care urmează cuprinde numai cărți dedicate (parțial uneori) jocurilor matematice, unele dintre ele nefolosite aici, nefiindu-mi accesibile sau neinteresînd direct subiectul acestei cărți. Le consemnez pentru a da un plus de informație cititorului. Nu am inclus în această listă alte cărți de GO în afara lucrării [26], în finalul căreia pot fi găsite titluri în plus asupra acestui subiect.

1. C.C. ABT, *Serious games: the art and science of games that simulate life*. The Wiking Press, 1970.
2. A. G. BELL, *Games playing with computers*. George Allen & Unwin, London, 1972.
3. R. C. BELL, *Board and table games from many civilizations*. Dover New York, 1979.
4. E.R. BERLEKAMP, J.H. CONWAY, R.K. GUY, *Winning ways for your mathematical plays*. Academic Press, New York, 1982.
5. L. CARROLL, *Symbolic logic and the game of logic*. Dover, New York, 1958.
6. P. CONSTANTINESCU, *Jocuri și probleme distractive*. Edit. Albatros, București, 1971.
7. J.H. CONWAY, *On numbers and games*. Academic Press, London New York, 1976.
8. E. de BONO, *The five-day course in thinking. Introducing the L-game*. Pelican, London, 1969.
9. H.E. DUDENEY, *Canterburry puzzles*, London, 1910.
10. J. ELFFERS, *El Tangram, Juego de formas chino*. Barral Editores, Barcelona, 1977.
11. J. FISHER (Ed.), *The magic of Lewis Carroll*. Penguin Books, 1981.
12. M. GARDNER (Ed.), *Mathematical puzzles of Sam Loyd*. (I) Dover, New York, 1959, (II) Dover, New York, 1960.
13. M. GARDNER, *Amuzamente matematice*. Edit. Științifică, București, 1968.
14. M. GARDNER (Ed.), 536 *puzzles and curious problems by H.E. Dudeney*. Chas. Scribner's Sons, New York, 1969.
15. M. GARDNER, *Alte amuzamente matematice*. Edit. Științifică, București, 1970.
16. M. GARDNER, *Mathematical carnival*. Alfred A. Knopf, New York, 1975.
17. S. W. GOLOMB, *Polyominoes*. Chas, Scribner's Sons, New York, 1965.
18. B.A. KORDEMSKI, *Matematica distractivă*. Edit. Tineretului, București, 1959.

19. M. KRAITCHIK, *Mathematical recreations*. George Allen & Unwin, London, 1943.
20. S. LOYD, *Cyclopedia of tricks and puzzles*. New York, 1914.
21. E. LUCAS, *Récréations mathématiques*. Gauthier Villars, Paris. 1882—94 (republicată în 1960 la Lib. Sci. A. Blanchard, Paris).
22. H.J.R. MURRAY, *A history of board games other than chess*, Clarendon Press, Oxford, 1952.
23. Edm. NICOLAU, *Clubul logicienilor*. Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1970.
24. N. OPRIȘIU, *Mai în glumă, mai în serios*. Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1981.
25. N. OPRIȘIU, *Olimpiada jocurilor raționale*. Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1984.
26. Gh. PĂUN, *Inițiere în GO*. RECOOP-CENTROCOOP, București. 1985.
27. Y. PERELMAN, *Figures for fun*. Mir. Publ., Moscova, 1979.
28. V. RĂDULESCU, *Duelul minții*. Edit. Militară, București, 1972.
29. V. RĂDULESCU, *Măiestria minții*. Edit. Militară, București, 1982.
30. E.R. SAGE, *Fun and games with the computer*. Entelek Inc. Newburyport, Mass., 1975.
31. F. SCHUR, *The master book of mathematical recreations*. Dover, New York, 1968.
32. D.D. SPENCER, *Game playing with computers*. Hayden, Rochelle Park, 1975.

Lector : G. FOLESCU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

Bun de tipar 5.III.1986. Apărut 1986.
Comanda nr. 2643.
Coli de tipar 13.

Tiparul executat sub comanda nr. 50 553
la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii"
Piața Scînteii nr. 1, București
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Volumul cuprinde o bogată colecţie de jocuri distractive, în care îşi dau întîlnire subtilitatea, inteligenţa şi calculul.

Realizată într-o manieră modernă, cu o informaţie care acoperă o mare perioadă de timp, lucrarea prezintă regulile şi strategiile unor jocuri de mare atracţie: de la BONOL, Moara cu noroc, CUGO etc. la TANGRAM, SOMA, cubul RUBIK, sfera VARGA, cît şi celebrul GO.

Explicaţiile inspirate precum şi descrierea impecabil organizată a unor partide de joc conferă lucrării un mare grad de accesibilitate.

Autorul, Gheorghe Păun, doctor în matematici, este bine cunoscut cititorilor Editurii Albatros prin lucrările sale anterioare: „Din spectacolul matematicii" (1983), cît şi povestirile de anticipaţie din „Sfera paralelă" (1984).

colecţia cristal

Lei 9,50